

NATALIA VALE ASARI

# NOTAS DE FÍSICA I



Universidade Federal de Santa Catarina, FSC 5101/FSC 5107, 2020-1  
13 de abril de 2022

Earthrise, pelo astronauta William Anders, 24/12/1968, na missão Apollo 8.

# Sumário

1	<i>Medidas físicas e unidades</i>	1
1.1	<i>Introdução à física</i>	1
1.2	<i>Unidades físicas</i>	2
1.2.1	<i>Padrões de comprimento, massa e tempo</i>	2
1.2.2	<i>Conversão de unidades</i>	2
1.3	<i>Análise dimensional</i>	3
1.4	<i>Algarismos significativos</i>	3
1.5	<i>Estimativa e ordens de magnitude</i>	4
2	<i>Cinemática unidimensional de partículas</i>	5
2.1	<i>Posição e deslocamento</i>	5
2.2	<i>Velocidade média</i>	5
2.3	<i>Velocidade instantânea</i>	6
2.3.1	<i>Nota sobre derivadas</i>	7
2.3.2	<i>Nota sobre integrais</i>	8
2.4	<i>Partícula com velocidade constante</i>	8
2.5	<i>Aceleração</i>	9
2.6	<i>Partícula com aceleração constante</i>	9
2.7	<i>Queda livre</i>	10
3	<i>Vetores</i>	13
3.1	<i>Vetores e escalares</i>	13

3.2	<i>Operações geométricas com vetores</i>	13
3.2.1	<i>Igualdade entre vetores</i>	13
3.2.2	<i>Soma de vetores</i>	13
3.2.3	<i>Vetor negativo</i>	14
3.2.4	<i>Subtração de vetores</i>	14
3.2.5	<i>Multipliação por escalar</i>	14
3.3	<i>Sistemas de coordenadas</i>	14
3.3.1	<i>Versores</i>	15
3.3.2	<i>Componentes de vetores</i>	15
3.4	<i>Álgebra vetorial</i>	15
3.4.1	<i>Adição algébrica de vetores</i>	15
3.4.2	<i>Produto escalar</i>	16
3.4.3	<i>Produto vetorial</i>	16
4	<i>Cinemática bidimensional de partículas</i>	19
4.1	<i>Vetores posição, velocidade e aceleração</i>	19
4.2	<i>Movimento de projéteis</i>	21
4.3	<i>Movimento circular uniforme</i>	23
4.3.1	<i>Quantidades angulares</i>	24
4.3.2	<i>Relação entre grandezas angulares e lineares</i>	24
4.4	<i>Movimento relativo</i>	25
5	<i>Leis de movimento</i>	29
5.1	<i>Forças</i>	29
5.2	<i>As leis de Newton</i>	30
5.2.1	<i>Diagrama de corpo livre</i>	30
5.3	<i>Força gravitacional</i>	30
5.4	<i>Força de atrito</i>	32
5.5	<i>Força no movimento circular</i>	33

6	<i>Energia</i>	35
6.1	<i>Trabalho realizado por forças</i>	35
6.2	<i>Energia cinética e o teorema trabalho-energia</i>	36
6.3	<i>Energia potencial</i>	37
6.4	<i>Conservação de energia</i>	37
6.4.1	<i>Forças conservativas</i>	38
6.4.2	<i>Relação entre forças conservativas e energia potencial</i>	38
6.4.3	<i>Forças não conservativas</i>	39
6.5	<i>Potência</i>	39
7	<i>Momento linear</i>	41
7.1	<i>Momento linear e segunda lei de Newton</i>	41
7.2	<i>Conservação do momento linear</i>	42
7.3	<i>Variação do momento em sistema não isolado</i>	42
7.4	<i>Centro de massa</i>	43
7.5	<i>Colisões em uma dimensão</i>	45
7.5.1	<i>Colisões perfeitamente inelásticas</i>	45
7.5.2	<i>Colisões elásticas</i>	45
7.6	<i>Colisões em duas dimensões</i>	46
	<i>Agradecimentos</i>	49



## 1

*Medidas físicas e unidades*1.1 *Introdução à física*

Física é uma ciência empírica. De hipóteses e modelos teóricos, fazemos previsões, que são testadas em experimentos e observações. Quando os modelos são suficientemente robustos, eles são empacotados em teorias físicas. Uma boa parte dos cursos básicos de Física (Física I a IV), lida com a Mecânica Clássica, que descreve bem fenômenos físicos em escalas grandes ( $> 1 \times 10^{-9}$  m) e baixas velocidades ( $\ll c$ , onde  $c \sim 300\,000$  km/s é a velocidade da luz no vácuo).

O quadro abaixo mostra os diferentes domínios da Física. O quadrante correspondente à Mecânica Clássica é o superior esquerdo.

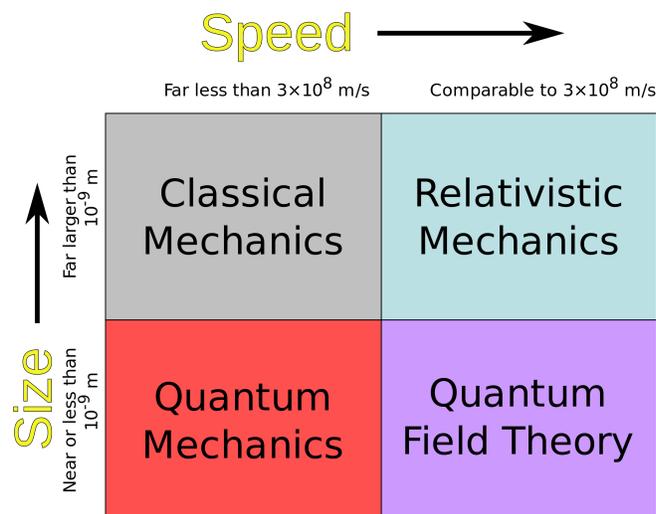


Figura 1.1: Wikipedia.

## 1.2 Unidades físicas

### 1.2.1 Padrões de comprimento, massa e tempo

Como Física é uma ciência empírica, é portanto necessário então obter medidas de quantidades físicas. Padrões de unidades físicas facilitam a comparação de medidas físicas. Em Mecânica Clássica, as unidades estão relacionados a comprimento, massa e tempo.

O sistema internacional (SI) estabeleceu em 1960 os padrões fundamentais de medidas. Usar o pé do rei ou da rainha não era mais adequado, pois as medidas deveriam ser facilmente reproduzíveis em qualquer lugar do Universo e a qualquer tempo.

Comprimento: distância entre dois pontos no espaço. Começou com definições associadas a reis (distância do nariz ao braço do rei da Inglaterra, tamanho do pé do rei da França). A primeira definição de metro (m) era de que era  $1/10^7$  a distância do equador ao Pólo Norte na linha longitudinal que passa por Paris. Já foi associado a várias barras de diferentes materiais e ao comprimento de onda da luz emitida por uma lâmpada de criptônio-86. Em 1983, estabeleceu-se que o metro é a distância percorrida pela luz no vácuo durante um intervalo de tempo de  $1/299\,792\,458$  segundos.

Massa: o quilograma (kg) foi durante muito tempo definido como um cilindro de irídio-platina. Somente em 20 de maio de 2019 ele foi atualizado para depender apenas de constantes fundamentais. O Comitê Internacional de Pesos e Medidas determinou em que a constante de Planck vale exatamente  $6,626\,070\,15 \times 10^{-34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$ , de modo que o kg é portanto definido em termos do metro e do segundo.

Tempo: o segundo (s) foi definido como  $(1/60)(1/60)(1/24)$  de um dia solar médio. A Terra está girando cada vez mais devagar (por isso adicionam-se segundos extras de vez em quando ao dia). Em 1967 a definição do segundo passou a ser 9 192 631 770 vezes o período de vibração da radiação de um átomo de césio-133.

Por que é importante se importantar com as unidades de medidas: ao resolver um problema, é bom ter uma intuição das quantidades físicas. A sonda Mars Climate Orbiter<sup>1</sup> falhou por causa de uma confusão entre unidades de força no SI e no sistema comumente usado nos Estados Unidos. Prédios podem cair! Sua tese de doutorado pode ficar errada. Você pode achar que vai chover quando via fazer sol.

<sup>1</sup> [https://en.wikipedia.org/wiki/Mars\\_Climate\\_Orbiter](https://en.wikipedia.org/wiki/Mars_Climate_Orbiter)

### 1.2.2 Conversão de unidades

Coloque as unidades nas suas contas para verificar, passo a passo, se a conversão está correta. Exemplo:

$$15,0 \text{ in} = (15,0 \text{ in}) \left( \frac{2,54 \text{ cm}}{1 \text{ in}} \right) = 38,1 \text{ cm.} \quad (1.1)$$

### 1.3 Análise dimensional

A distância entre dois pontos pode ser expressa em metros, milhas, centímetros. Todas essas unidades são formas diferentes de expressar *comprimento*. Vamos utilizar as seguintes dimensões nesse curso: massa (expresso por [M]), comprimento ([L], de largura) e tempo ([T]).

Duas grandezas só podem ser somadas se tiverem a mesma dimensão. Dessa regra simples, podemos descobrir se várias fórmulas algébricas estão dimensionalmente corretas (i.e. se as dimensões usadas nos dois lados da equação são consistentes.)

Considere um movimento uniformemente acelerado, descrito por  $x = \frac{1}{2}at^2$ . Da análise dimensional, temos

$$L = \frac{L}{T^2} \cdot T^2 = L. \quad (1.2)$$

Portanto, a equação está dimensionalmente correta.

Imagine que quiséssemos descobrir os expoentes da equação:

$$x \propto a^n t^m, \quad (1.3)$$

onde  $n$  e  $m$  são os expoentes que queremos determinar e  $\propto$  indica proporcionalidade. Da análise dimensional,

$$[L] = [(LT^{-2})^n][T^m] \quad (1.4)$$

$$[L] = [L^n T^{-2n} T^m] \quad (1.5)$$

$$[L] = [L^n T^{m-2n}] \quad (1.6)$$

$$[L^1 T^0] = [L^n T^{m-2n}]. \quad (1.7)$$

Portanto,  $n = 1$  e  $m - 2n = 0 \Rightarrow m = 2$ . Ou seja,

$$x \propto a^1 t^2, \quad (1.8)$$

como era a nossa equação original a menos do termo de proporcionalidade.

### 1.4 Algarismos significativos

Toda medida tem valor e incerteza. Incerteza depende da precisão instrumental (qual é a menor divisão de escala do instrumento?) e da incerteza estatística (ao repetir medida, quão próximos são os valores obtidos?).

- Use todos os algarismos na conta até o passo final. Use o  $\pi$  da calculadora/-computador.
- Arredonde no fim usando teoria dos erros (aulas de Física Experimental I) ou com ‘regras básicas’.

### 1.5 *Estimativa e ordens de magnitude*

Podemos avaliar um número apenas em potências de 10. Esse tipo de análise é chamada de ordem de grandeza ou de magnitude. Usamos o símbolo  $\sim$  para expressar 'da ordem de magnitude de':

$$0,0086 \text{ m} \sim 10^{-2} \text{ m}; \quad 0,0021 \text{ m} \sim 10^{-3} \text{ m}; \quad 720 \text{ m} \sim 10^3 \text{ m}. \quad (1.9)$$

## 2

*Cinemática unidimensional de partículas*

Cinemática: descrição do movimento de um objeto sem preocupação com interações ou agentes externos que afetem o movimento. Aqui nos preocupamos com o movimento translacional (i.e. não rotacional ou vibracional) de *partículas*, i.e. objetos com massa mas cuja dimensão infinitesimal.

2.1 *Posição e deslocamento*

Considere uma linha reta e escolha um ponto para considerar como origem. Se uma partícula só pode se movimentar nessa linha reta, sua *posição*  $x$  representa a sua localização em relação à origem. Escolhe-se um sentido nesse eixo de coordenadas que indicam valores crescentes de  $x$ . Escolhendo o  $x$  crescente para a direita, aqui estão alguns exemplos de posições:

$$x_1 = -10 \text{ m} \qquad x_2 = 0 \text{ m (origem)} \qquad x_3 = 20 \text{ m}$$

O *deslocamento* de uma partícula é definido como a variação da posição em um dado intervalo de tempo. Se a partícula começa em  $x_i$  e termina em  $x_f$ , então o seu deslocamento é

$$\Delta x \equiv x_f - x_i. \qquad (2.1)$$

Assim como a posição  $x$ , o deslocamento  $\Delta x$  pode ter valores positivos (se  $x_f > x_i$ ) ou não-positivos (se  $x_f \leq x_i$ ). Uma quantidade que contém tanto um valor (ou módulo) ou um sentido (neste caso unidimensional, dado pelos sinais – ou +), é dita uma grandeza *vetorial*.

Em contraste, uma grandeza *escalar* possui apenas um valor.<sup>1</sup>

2.2 *Velocidade média*

A tabela ao lado mostra a posição de um carro em diversos instantes de tempo. O painel (a) da Figura abaixo traz a representação pictórica da tabela, e o painel (b) mostra um gráfico da posição em função do tempo. O gráfico contém mais informações do que a tabela ou o desenho, porque mostra a posição do carro entre os instantes de tempo A, B, C, D, E e F.

<sup>1</sup> A distância total percorrida, por exemplo, é uma grandeza escalar.

**Table 2.1** Position of the Car at Various Times

Position	$t$ (s)	$x$ (m)
Ⓐ	0	30
Ⓑ	10	52
Ⓒ	20	38
Ⓓ	30	0
Ⓔ	40	-37
Ⓕ	50	-53

Figura 2.1: Serway & Jewett (2013).

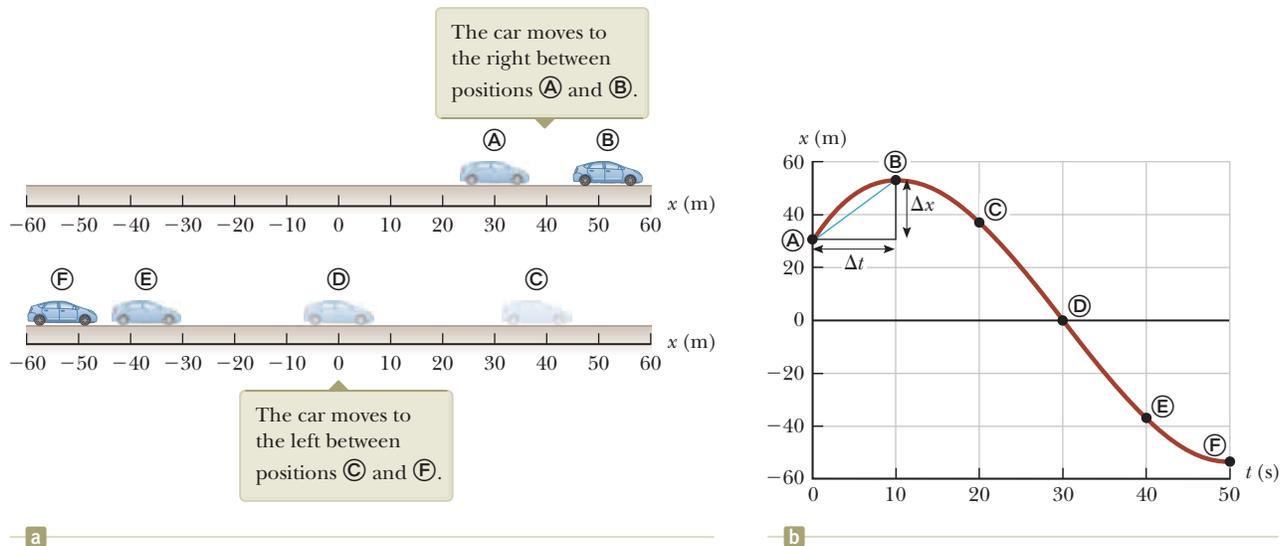


Figura 2.2: Serway & Jewett (2013).

Compare os intervalos de tempo DE e EF. Em qual dos intervalos a *velocidade média* do carro é maior? A velocidade média é definida como a razão entre o deslocamento e o intervalo de tempo ocorrido durante o deslocamento:

$$v_{x,\text{med}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (2.2)$$

Temos

$$v_{\text{DE,med}} = \frac{-37 - 0 \text{ m}}{40 - 30 \text{ s}} = -3,7 \text{ m s}^{-1}; \quad (2.3)$$

$$v_{\text{EF,med}} = \frac{-53 - (-37) \text{ m}}{50 - 40 \text{ s}} = -1,6 \text{ m s}^{-1}. \quad (2.4)$$

Portanto, em módulo, a maior velocidade média é no trecho DE.

Pausa para pensar: o que significa uma velocidade negativa?

Graficamente,  $v_{x,\text{med}}$  é o *coeficiente angular* da reta que liga o ponto inicial ao final. No painel (b) da figura acima, entre os pontos A e B desenhamos  $\Delta x$  e  $\Delta t$ . A reta em azul tem coeficiente angular  $\Delta x/\Delta t = v_{x,\text{med}}$ .

### 2.3 Velocidade instantânea

Vamos retornar ao gráfico anterior da posição do carro em função do tempo.

Do coeficiente angular das retas azuis, temos a velocidade média entre A e B e entre E e F.

E qual será a velocidade em um instante dado de tempo, por exemplo no ponto A? Esse é um assunto para o cálculo! Imagine que tomemos o ponto B cada vez mais próximo do ponto A. O que isso significa? Que o intervalo de tempo  $\Delta t$  entre A e B fica cada vez menor. Quando  $\Delta t$  é muito pequeno, A e B

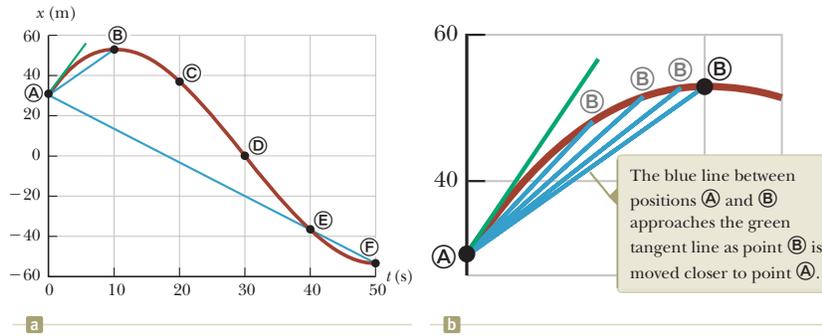


Figura 2.3: Serway &amp; Jewett (2013).

são coincidentes, e temos então a *velocidade instantânea*:

$$v_x \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{x,\text{med}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}. \quad (2.5)$$

Na notação do cálculo, o limite acima é chamado de *derivada* de  $x$  com relação a  $t$ , e a notação usada é  $dx/dt$ .

A velocidade instantânea pode ser positiva ou negativa, se a tangente à curva for positiva ou negativa. Ela pode também ser nula, como no ponto B original: a tangente é horizontal, e o carro está momentaneamente em repouso.

### 2.3.1 Nota sobre derivadas

O cálculo foi inventado simultaneamente por Newton e Leibniz. Ele tem ferramentas que ajudam a lidar com quantidades instantâneas.

Neste curso, vamos lidar com derivadas de polinômios. Provou-se no cálculo que

$$\text{a derivada de } u = ct^n \text{ é } \frac{du}{dt} = nct^{n-1}. \quad (2.6)$$

Suponha que a posição de uma partícula é dada pela expressão  $x = 2t^2$ , com  $x$  em m e  $t$  em s. A velocidade em qualquer instante de tempo é

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 2 \cdot 2t^{2-1} = 4t. \quad (2.7)$$

A figura ao lado mostra a representação gráfica de  $x(t)$  e  $v(t)$ . Note como o valor de  $v(t)$  corresponde à tangente à curva  $x(t)$  em qualquer instante de tempo  $t$ .

A outra informação que precisamos sobre derivadas é que a derivada de duas funções é a soma da derivada de cada função:

$$\frac{d}{dt}(u + w) = \frac{du}{dt} + \frac{dw}{dt}. \quad (2.8)$$

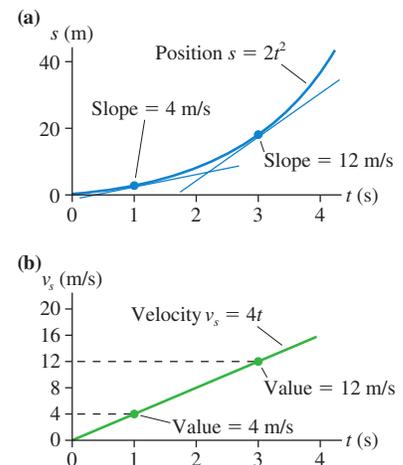


Figura 2.4: Knight (2013).

### 2.3.2 Nota sobre integrais

Se é possível achar a velocidade em termos da posição, é possível achar o deslocamento se temos a velocidade?

Se a velocidade é constante, simplesmente usamos  $\Delta x = v_x \Delta t$ . O que fazer no caso em que velocidade muda a cada instante de tempo?

A figura ao lado mostra um gráfico da velocidade em função do tempo, mas a velocidade agora varia em função do tempo. Podemos achar o deslocamento aproximado se dividirmos a função em diversos pedaços ( $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_N$ ), e aproximar cada pedaço como tendo uma velocidade constante. Como o deslocamento de cada pedaço é  $v_{x,ave} \Delta t$ , então o deslocamento total pode ser aproximado por

$$\Delta x \approx \Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_N = \sum_{k=1}^N (v_{x,ave})_k \Delta t. \quad (2.9)$$

Como calcular o valor exato do deslocamento? Assim como fizemos para achar a velocidade instantânea, podemos tomar pedaços infinitesimalmente pequenos fazendo  $\Delta t \rightarrow 0$ . A soma agora é representada por uma *integral*:

$$\Delta x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^N (v_{x,ave})_k \Delta t = \int_{t_i}^{t_f} v_x dt, \quad (2.10)$$

onde lemos o lado direito da equação como ‘a integral de  $v_x dt$  de  $t_i$  a  $t_f$ .’

Graficamente, portanto, o deslocamento é dado pela área embaixo da curva de  $v$  contra  $t$ .

### 2.4 Partícula com velocidade constante

Um conceito importante em Física é o de *modelo*. O modelo representa uma situação comum que aparece a todo momento. Um modelo de muito sucesso na Física é o oscilador harmônico, que é assunto de Física II. Eles são importantes porque, uma vez que você identifica que o seu problema se encaixa em um dado modelo, você pode partir da solução de um problema anterior daquele modelo. Isso é um pouco parecido, no judiciário, com o conceito de procurar processos anteriores para achar jurisprudência.

Identificar o *modelo* é diferente de procurar uma equação. Você primeiro tem que identificar qual modelo é apropriado para resolver um problema. Apenas então você saberá, dentre as equações apropriadas ao modelo, qual equação usar.

Consideremos o modelo de partícula com velocidade constante, também conhecido como movimento retilíneo uniforme. Esse modelo pode ser aplicado a qualquer situação em que uma partícula se move a velocidade constante.

Considere o gráfico ao lado, que mostra que a posição em função do tempo de uma partícula é uma reta. Vimos que a velocidade média é a mesma em

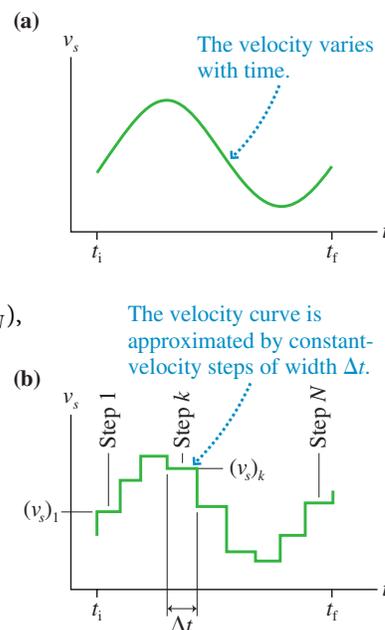


Figura 2.5: Knight (2013).

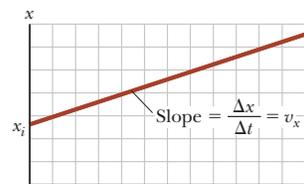


Figura 2.6: Serway & Jewett (2013).

qualquer trecho do percurso. Ou seja, a velocidade é constante; ou, o que é equivalente, a velocidade instantânea é sempre a mesma. Portanto, a velocidade instantânea é igual à velocidade média:

$$v_x = v_{x,\text{med}} \quad (2.11)$$

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (2.12)$$

Escrevendo o deslocamento como  $\Delta x = x_f - x_i$  e rearranjando a equação,

$$x_f = x_i + v_x t \quad (\text{para } v_x \text{ constante}). \quad (2.13)$$

## 2.5 Aceleração

Na Seção 2.3.1, mostramos um gráfico de posição em função do tempo descrita pela função  $x = 2t^2$ . Mostramos que a velocidade varia em função do tempo assim:  $v_x = dx/dt = 4t$ .

A velocidade não é mais constante, portanto. Quando a velocidade varia com o tempo, dizemos que partícula está acelerando. A aceleração média entre dois instantes de tempo é definida como o quociente entre a variação da velocidade e o intervalo de tempo:

$$a_{x,\text{med}} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t_f - t_i} \quad (2.14)$$

A aceleração instantânea, como no caso da velocidade instantânea, é o caso limite da aceleração média medida ou calculada em o intervalo de tempo infinitesimalmente pequeno:

$$a_x \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} a_{x,\text{med}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt} \quad (2.15)$$

Lembrando da definição de velocidade instantânea (eq. 2.5), a aceleração também é dada pela segunda derivada da posição em relação ao tempo:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (2.16)$$

A figura ao lado mostra a relação entre as curvas da velocidade e da aceleração.

Note que a aceleração, assim como a velocidade, o deslocamento e a posição, é um vetor. A aceleração tem, portanto, um sentido (no caso unidimensional, dado pelos sinais + ou -). A aceleração só diminui o módulo da velocidade quando a aceleração e a velocidade têm sentidos *opostos*. Uma *aceleração negativa* não necessariamente significa que uma partícula está *desacelerando*! Portanto, vamos evitar o termo *desaceleração*, que é confuso.

## 2.6 Partícula com aceleração constante

O modelo da partícula com aceleração constante também é conhecido como movimento retilíneo uniformemente variado.

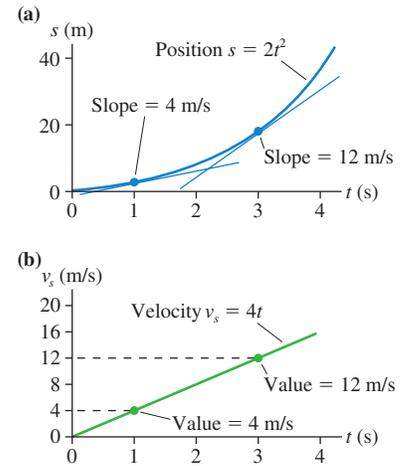


Figura 2.7: Knight (2013).

Se uma partícula tem aceleração constante, então sua aceleração instantânea é igual à sua aceleração média:

$$a_x = a_{x,\text{med}} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{\Delta t}. \quad (2.17)$$

Rearranjando os termos, a velocidade é dada por

$$v_{xf} = v_{xi} + a_x t, \quad (2.18)$$

onde fizemos  $t_i = 0 \Rightarrow \Delta t = t_f - t_i = t_f \equiv t$ .

A Figura ao lado mostra os gráficos da aceleração e da velocidade em função do tempo para uma partícula com aceleração constante.

E como podemos calcular a posição em função o tempo? Vimos na Seção 2.3.2 que o deslocamento é dado pela integral de  $v_x$  em um determinado intervalo de tempo, e que a integral corresponde à área embaixo da curva de  $v_x$ . Do gráfico ao lado, a área pode ser dividida entre a área do retângulo inferior e a área do triângulo superior. Assim,

$$\Delta x = v_{xi} \Delta t + \frac{1}{2} a_x (\Delta t)^2. \quad (2.19)$$

Fazendo  $\Delta x = x_f - x_i$ , tomando  $\Delta t = t$  como acima, e rearranjando os termos,

$$x_f = x_i + v_{xi} t + \frac{1}{2} a_x t^2. \quad (2.20)$$

Uma última equação muito útil é a que relaciona velocidade e posição, com a dependência temporal implícita.

$$v_{xf}^2 = v_{xi}^2 + 2a_x (x_f - x_i) \quad (2.21)$$

Essa equação é obtida da combinação das eq. (2.18) e (2.20). Da eq. (2.18), obtemos

$$t = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{a_x}. \quad (2.22)$$

Substituindo na eq. (2.20),

$$x_f - x_i = v_{xi} \frac{v_{xf} - v_{xi}}{a_x} + \frac{1}{2} a_x \left( \frac{v_{xf} - v_{xi}}{a_x} \right)^2 \quad (2.23)$$

$$\Rightarrow x_f - x_i = v_{xi} \frac{v_{xf} - v_{xi}}{a_x} + \frac{(v_{xf} - v_{xi})^2}{2a_x} \quad (2.24)$$

A eq. (2.21) é obtida após multiplicar a equação acima por  $2a_x$  e rearranjar os termos.

## 2.7 Queda livre

Na história da ciência ocidental, a suposição de Aristóteles (século IV A.C.) de que objetos mais pesados caem mais rápido do que objetos mais leves permaneceu inquestionada até a época de Galileu Galilei (séculos XVI e XVII).

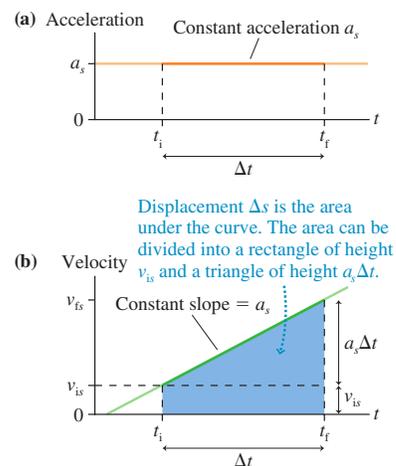


Figura 2.8: Knight (2013).

O que mudou? A hipótese aristotélica foi confrontada com experimentos. A lenda é que Galileu largou dois objetos da torre de Pisa para verificar se o mais pesado chegava ao chão primeiro – não deveria chegar. A história verdadeira deve ser que ele chegou à essa conclusão observando foi o movimento de pêndulos e de objetos em planos inclinados. A *aceleração* de dois corpos sob ação da gravidade independe das suas massas.

A expressão *queda livre* designa um objeto movendo-se *livremente* sob a influência apenas da *gravidade*. Um objeto largado do repouso, ou lançado para cima ou para baixo com uma velocidade inicial estão todos em queda livre. Todos eles irão sofrer um aceleração para baixo (mais precisamente, para o centro da Terra), não importa qual seja sua velocidade inicial.

A aceleração da gravidade na superfície da Terra tem um valor médio de  $g \sim 9,80 \text{ m/s}^2$ , mas varia ponto a ponto – a Terra não é perfeitamente esférica, nem sua constituição é uniforme. Ignorando o atrito com o ar, a aceleração de um objeto em queda livre é  $g$ . As equações para uma partícula com aceleração constante são todas aplicáveis a um objeto em queda livre; basta mudar a convenção do eixo horizontal  $x$  para um eixo vertical  $y$ .



# 3

## Vetores

### 3.1 Vetores e escalares

Quantidades físicas *escalares* necessitam somente de um número e uma unidade para serem definidas. Um exemplo é a temperatura; a temperatura na superfície do Sol, por exemplo, é  $6 \times 10^3$  K.

Quantidades *vetoriais* são definidas por um número e uma unidade (o módulo do vetor) e um sentido. No capítulo 2, vimos que a distância total percorrida é um escalar, mas o deslocamento, a velocidade e a aceleração são vetores.

A Figura ao lado mostra o vetor deslocamento entre os pontos A (a tenda) e B (o lago). Não importa o caminho tomado, o vetor deslocamento é sempre o mesmo.

Um vetor é geralmente representado como  $\vec{A}$  ou **A**. Seu módulo ou norma é representado por  $A$ ,  $|\vec{A}|$  ou  $|\mathbf{A}|$ .

### 3.2 Operações geométricas com vetores

#### 3.2.1 Igualdade entre vetores

A figura ao lado mostra quatro vetores em um sistema de coordenadas  $xy$ . Todos são paralelos, apontam no mesmo sentido e têm o mesmo tamanho; são portanto vetores idênticos. Portanto, dois vetores são iguais ( $\vec{A} = \vec{B}$ ) se eles tiverem o mesmo sentido e se  $A = B$ .

#### 3.2.2 Soma de vetores

Há duas formas gráficas de representar a soma de vetores. Começamos por desenhar os vetores usando a mesma escala (painel a).

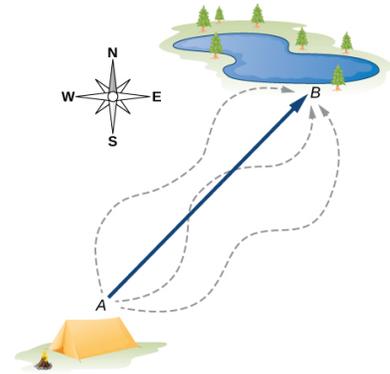
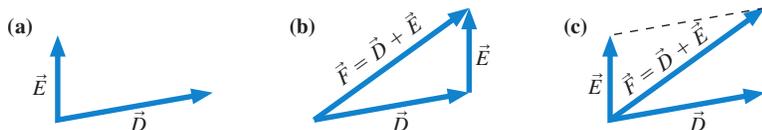


Figura 3.1: Ling, Sanny & Moebis (2018), licença CC BY 4.0. Faça download gratuito em <https://openstax.org/details/books/university-physics-volume-1>.

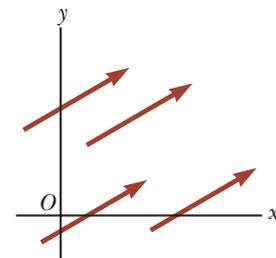


Figura 3.2: Serway & Jewett (2013).

Figura 3.3: Knight (2013).

Imagine então que a soma dos vetores é o deslocamento total, por exemplo. Se você se deslocou por  $\vec{D}$  e depois por  $\vec{E}$ , seu deslocamento total é o vetor  $\vec{F}$  que une o início de  $\vec{D}$  ao fim de  $\vec{E}$  (painel b).

Você pode também desenhar um paralelogramo cujos lados são seus vetores originais. A diagonal do paralelogramo é o vetor resultante  $\vec{F}$  (painel c).

Note que não importa se você primeiro se desloca  $\vec{D}$  e depois  $\vec{E}$ , ou vice-versa. Desenhe  $\vec{D} + \vec{E}$  e  $\vec{E} + \vec{D}$  no painel c acima, e mostre que ambos resultam em  $\vec{F}$ . Isso implica que a adição de vetores é uma operação comutativa (isto é, independe da ordem):

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}. \quad (3.1)$$

A adição de vários vetores é associativa:

$$(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}). \quad (3.2)$$

### 3.2.3 Vetor negativo

A adição de um vetor ao seu vetor negativo resulta em um vetor nulo:

$$\vec{A} + (-\vec{A}) = 0. \quad (3.3)$$

Os vetores  $\vec{A}$  e  $-\vec{A}$  têm o mesmo módulo, mas sentidos opostos.

### 3.2.4 Subtração de vetores

Subtração de vetores é equivalente à adição de um vetor com o inverso do outro vetor:

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}). \quad (3.4)$$

Graficamente, basta inverter o vetor a ser subtraído antes de aplicar um dos métodos de adição gráfica.

### 3.2.5 Multiplicação por escalar

A multiplicação de um vetor por um escalar altera o módulo do vetor: o vetor  $m\vec{A}$  tem módulo  $m \cdot A$ . Se  $m$  é negativo, o sentido de  $m\vec{A}$  é oposto ao de  $\vec{A}$ .

## 3.3 Sistemas de coordenadas

Para um vetor com mais de uma dimensão espacial, é útil defini-lo em relação a um sistema de coordenadas. Coordenadas cartesianas (também conhecidas como coordenadas retangulares) são definidas por eixos ortogonais que se intersectam em uma origem. Em duas dimensões, costumamos usar os eixos cartesianos  $x$  e  $y$ ; adicionamos um terceiro eixo  $z$  para representar três

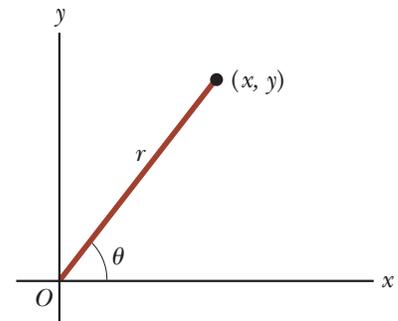


Figura 3.4: Serway & Jewett (2013).

dimensões. Um vetor é descrito, portanto, pelas suas dimensões nessas três coordenadas.

Em duas dimensões, podemos definir coordenadas polares:  $r$  (módulo do vetor) e  $\theta$  (ângulo com o eixo  $x$ , medido no sentido anti-horário). A transformação de coordenadas polares em retangulares e vice-versa é feita a partir de relações trigonométricas:

$$x = r \cos \theta, \tag{3.5}$$

$$y = r \sin \theta; \tag{3.6}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}, \tag{3.7}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{3.8}$$

Acrescentando um eixo  $z$  às coordenadas polares (2D), elas viram coordenadas cilíndricas (3D). Outro sistema útil de coordenadas útil em três dimensões é o esférico (ver a convenção mais usada em física ao lado).

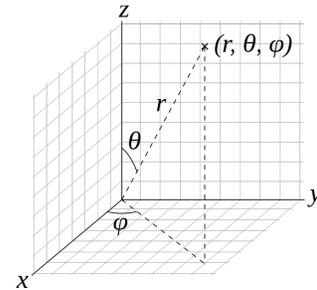


Figura 3.5: Andeggs, Wikimedia commons.

### 3.3.1 Versores

Vetores unitários ou *versores* são vetores de norma 1. Eles são úteis para indicar os sentidos dos eixos de coordenadas. No eixo cartesiano, a convenção é usar os versores  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$  para designar os sentidos dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

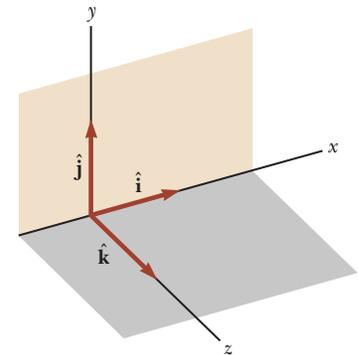


Figura 3.6: Serway & Jewett (2013).

### 3.3.2 Componentes de vetores

Um vetor pode ser expresso pela soma das suas componentes nos eixos de coordenadas. Em três dimensões,

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}. \tag{3.9}$$

O módulo de um vetor é dado então por

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}. \tag{3.10}$$

Pausa para pensar: Qual é a relação entre a equação acima e o sistema de coordenadas polares (em 2D) ou cilíndricas (em 3D)?

## 3.4 Álgebra vetorial

Com a ferramenta de decomposição de vetores em mãos, vamos revisar a adição de vetores e definir a multiplicação entre vetores.

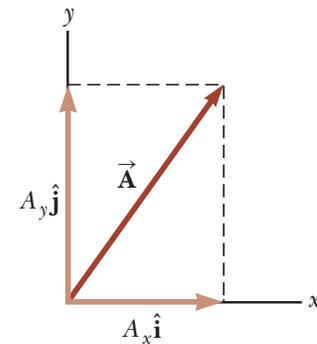


Figura 3.7: Serway & Jewett (2013).

### 3.4.1 Adição algébrica de vetores

A soma de dois vetores pode ser expressa pela soma de cada uma das suas componentes:

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) + (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) \tag{3.11}$$

$$= (A_x + B_x) \hat{i} + (A_y + B_y) \hat{j} + (A_z + B_z) \hat{k}. \tag{3.12}$$

### 3.4.2 Produto escalar

O resultado do produto escalar (também conhecido como produto interno; *dot product*) é um *escalar*. Ele é definido como

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \equiv AB \cos \theta. \quad (3.13)$$

A interpretação gráfica<sup>1</sup> é a seguinte: primeiro, tomamos a componente do vetor de  $\vec{B}$  paralela ao vetor  $\vec{A}$ . O produto escalar é o produto dos módulos desses dois vetores paralelos.

O produto escalar é comutativo:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}. \quad (3.14)$$

Portanto, você também pode interpretá-lo como o produto entre  $B$  e o módulo da projeção de  $\vec{A}$  na direção do vetor  $\vec{B}$ .

Um exemplo de aplicação na física é na definição de trabalho:  $W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{s}$ . Isto é, a componente da força que realiza trabalho é apenas aquela paralela ao deslocamento.

Se os vetores estão decompostos em coordenadas cartesianas, o procedimento algébrico não precisa passar pelo cálculo dos módulos dos vetores e do ângulo entre eles. Usamos as propriedades dos versores ortogonais:

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1; \quad (3.15)$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0. \quad (3.16)$$

A primeira expressão vem do fato que cada versor é paralelo a si mesmo ( $\theta = 0 \Rightarrow \cos \theta = 1$ ) e que seus módulos valem 1. A segunda vem do fato de que os versores são ortogonais entre si ( $\theta = \pi/2 \Rightarrow \cos \theta = 0$ ).

Usando esse resultado, pode-se mostrar que o produto vetorial de dois vetores tridimensionais é

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \quad (3.17)$$

### 3.4.3 Produto vetorial

O resultado do produto vetorial (*cross product*) é um *vetor*. Definindo

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}, \quad (3.18)$$

o módulo de  $\vec{C}$  é

$$C = AB \sin \theta. \quad (3.19)$$

O vetor  $\vec{C}$  é ortogonal tanto a  $\vec{A}$  quanto a  $\vec{B}$ , e seu sentido é dado pela regra da mão direita, conforme a figura a seguir.

A interpretação gráfica<sup>2</sup> é a seguinte: o módulo  $C$  é a área do paralelogramo formado por  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$ . O sentido de  $\vec{C}$  pode ser associado a uma rotação, indicando se ela acontece no sentido horário ou anti-horário.

<sup>1</sup> Veja essas animações elucidativas do produto escalar por Carolina Moura.

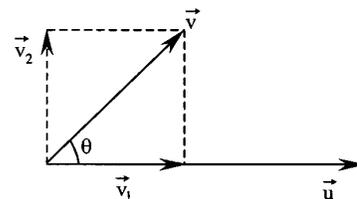


Figura 3.8: Winterle (2000).

<sup>2</sup> Veja essas animações elucidativas do produto vetorial por Carolina Moura.

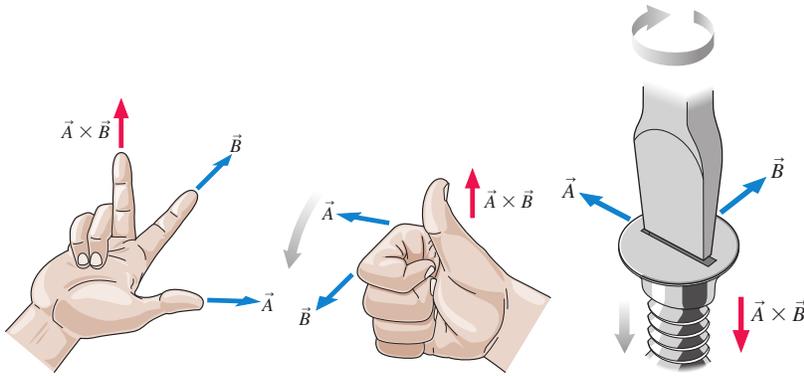


Figura 3.9: Knight (2013).

O produto vetorial é anticomutativo:

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}. \quad (3.20)$$

Se os vetores estão decompostos em coordenadas cartesianas, o procedimento algébrico não precisa passar pelo cálculo dos módulos dos vetores e do ângulo entre eles. Usamos as propriedades dos versores ortogonais:

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0; \quad (3.21)$$

$$\hat{i} \times \hat{j} = -\hat{j} \times \hat{i} = \hat{k}; \quad (3.22)$$

$$\hat{j} \times \hat{k} = -\hat{k} \times \hat{j} = \hat{i}. \quad (3.23)$$

$$\hat{k} \times \hat{i} = -\hat{i} \times \hat{k} = \hat{j}. \quad (3.24)$$

A primeira expressão vem do fato que cada versor é paralelo a si mesmo ( $\theta = 0 \Rightarrow \sin \theta = 0$ ). As três últimas podem ser demonstradas a partir do fato de que os versores são ortogonais entre si ( $\theta = \pi/2 \Rightarrow \sin \theta = 1$ ), seus módulos valem 1, e a partir da regra da mão direita da definição do produto vetorial.

Usando esse resultado, uma forma de calcular o produto vetorial é expressando-o como um determinante:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}; \quad (3.25)$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k}. \quad (3.26)$$

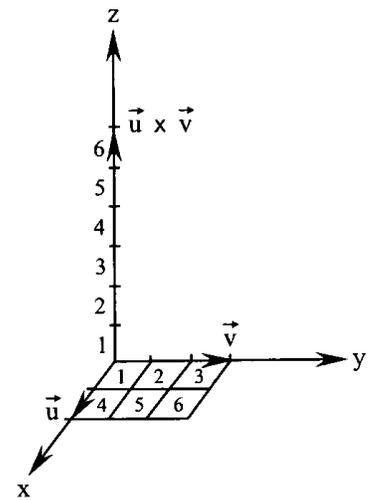


Figura 3.10: Winterle (2000).



## 4

## Cinemática bidimensional de partículas

O objetivo desse capítulo é unir a cinemática unidimensional com vetores em mais de uma dimensão.

### 4.1 Vetores posição, velocidade e aceleração

Vamos descrever o movimento de uma partícula no plano  $xy$  em que as componentes horizontal e vertical da aceleração são independentes. A figura ao lado mostra a trajetória de uma partícula, cuja posição em um dado instante de tempo é dada pelo vetor posição  $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ .

O vetor deslocamento é dado pela subtração do vetor posição final e inicial:

$$\Delta \vec{r} \equiv \vec{r}_f - \vec{r}_i = (x_f - x_i)\hat{i} + (y_f - y_i)\hat{j} = \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j}. \quad (4.1)$$

A velocidade média também é um vetor:

$$\vec{v}_{\text{med}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{j}. \quad (4.2)$$

A figura ao lado mostra os vetores deslocamento e velocidade média para uma dada trajetória.

Como no caso unidimensional, a velocidade instantânea é definida com a velocidade média para um intervalo de tempo infinitesimal:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j}. \quad (4.3)$$

A figura ao lado mostra graficamente o significado da velocidade instantânea no ponto 1.

Podemos escrever também a velocidade como as suas componentes horizontal e vertical,

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}, \quad (4.4)$$

onde

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad \text{e} \quad v_y = \frac{dy}{dt}. \quad (4.5)$$

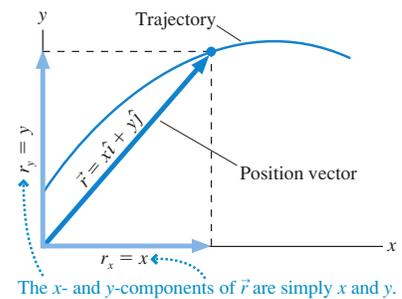


Figura 4.1: Knight (2013).

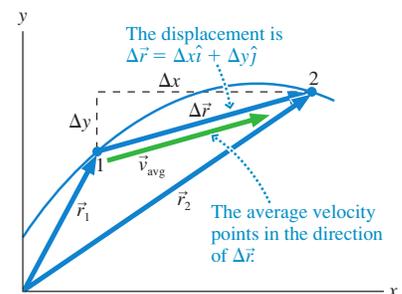


Figura 4.2: Knight (2013).

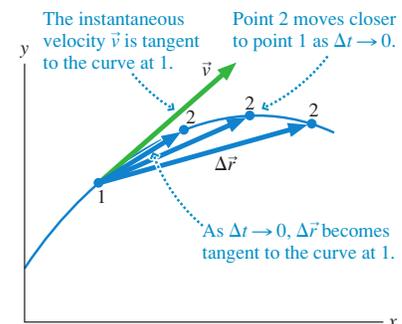


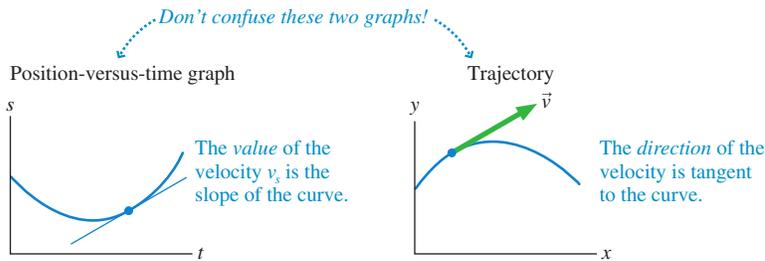
Figura 4.3: Knight (2013).

Como todo vetor em duas dimensões, a velocidade pode ser decomposta nas suas componentes  $x$  e  $y$  (coordenadas retangulares), mas também pode ser expressa como um módulo e ângulo com o eixo  $x$  (coordenadas polares). As relações entre as representações nos dois sistemas de coordenadas são

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v \cos \theta, \\ v_y &= v \sin \theta; \end{aligned} \right\} \quad (a) \quad \left. \begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \\ \tan \theta &= \frac{v_y}{v_x}. \end{aligned} \right\} \quad (b) \quad (4.6)$$

Cuidado para não confundir os gráficos abaixo! O painel à esquerda mos-

FIGURE 4.7 Two different uses of tangent lines.



tra um gráfico de posição ( $x$ ,  $y$ , ou outra coordenada arbitrária) em função do tempo. A velocidade instantânea é o coeficiente angular da reta tangente a um ponto da curva. O painel à direita mostra um gráfico da trajetória da partícula em um plano  $xy$ : seria como uma foto com alta exposição do objeto. O sentido da velocidade é dado pela reta tangente a um ponto da curva. Nesse caso, no entanto, só temos o sentido de  $\vec{v}$ , e não o seu módulo.

O vetor aceleração média é dado por

$$\vec{a}_{\text{med}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}. \quad (4.7)$$

A figura ao lado mostra a maneira de obter o sentido do vetor aceleração.

A aceleração instantânea é a aceleração média em um instante de tempo infinitesimal:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_{\text{med}}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (4.8)$$

A aceleração pode causar duas mudanças no vetor velocidade: (a) o módulo da velocidade pode mudar, e/ou (b) o sentido da velocidade pode mudar. O vetor aceleração tem o papel duplo de mapear os dois tipos de mudanças. As figura ao lado mostra que a aceleração pode ser decomposta em uma componente paralela ( $\vec{a}_{\parallel}$ ) e uma perpendicular ( $\vec{a}_{\perp}$ ) à velocidade. A componente paralela é a responsável pela mudança (a) do módulo, e a perpendicular (b) do sentido.

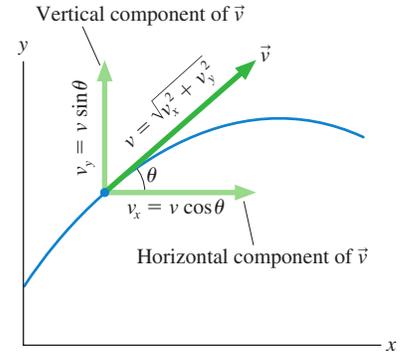


Figura 4.4: Knight (2013).

Figura 4.5: Knight (2013).

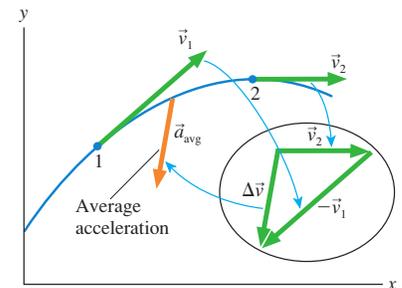
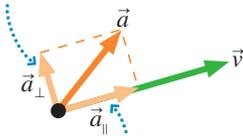


Figura 4.6: Knight (2013).

This component of  $\vec{a}$  is changing the direction of motion.



This component of  $\vec{a}$  is changing the speed of the motion.

Figura 4.7: Knight (2013).

O painel (a) ao lado mostra a aceleração instantânea em um ponto da trajetória, e as componentes paralela e perpendicular à velocidade. A componente perpendicular para baixo é a responsável por fazer a trajetória mudar para uma curva circular para baixo. Às vezes é mais conveniente decompor a aceleração em componentes cartesianas:

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \hat{i} + \frac{dv_y}{dt} \hat{j}, \quad (4.9)$$

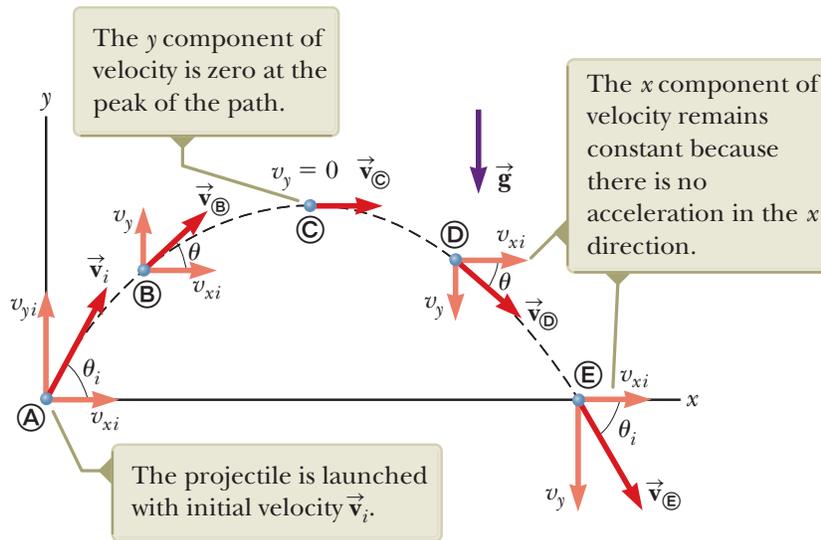
onde

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \quad \text{e} \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}. \quad (4.10)$$

O painel (b) ao lado mostra a decomposição do vetor aceleração em coordenadas retangulares. Cada componente da aceleração atua no seu eixo:  $a_x$  é a responsável pela variação da velocidade  $v_x$ , e  $a_y$  é pela variação da velocidade  $v_y$ .

### 4.2 Movimento de projéteis

Um modelo útil dentro da cinemática bidimensional é o movimento de projéteis. A figura mostra a trajetória parabólica desse movimento.



As hipótese por trás desse modelo são: (a) a partícula está em queda livre com aceleração para baixo constante, (b) o efeito do atrito com ar é desprezível. Em (a), portanto, estamos (a1) aproximando a Terra como uma superfície plana em pequena escala, (a2) a partícula não pode ir muito alto para que  $g$  varie demais, e (a3) a partícula não tem dimensões. Em (b), temos que (b1) o corpo não tem velocidade muito alta, ou o atrito do ar seria considerável,

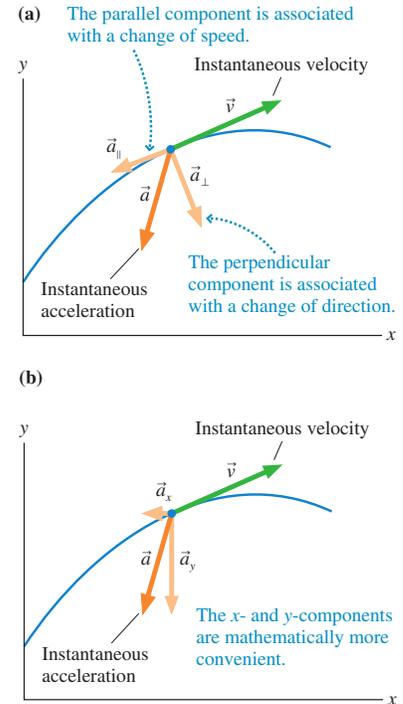


Figura 4.8: Knight (2013).

Figura 4.9: Serway & Jewett (2013).

e (b2) o objeto não gira, ou teríamos que considerar efeitos aerodinâmicos. Portanto, o movimento de projéteis é um bom modelo para o lançamento de uma bola no ar, mas não para o lançamento de foguetes.

O movimento de um projétil pode ser dividido em duas partes independentes: o movimento horizontal ( $x$ ) e o vertical ( $y$ ). Supondo que o lançamento é feito em um ângulo  $\theta_i$  com a horizontal e com velocidade de módulo  $v_i$ , é útil decompor a velocidade inicial ( $v_i$ ) do projétil em suas duas componentes cartesianas:

$$v_{xi} = v_i \cos \theta_i, \quad v_{yi} = v_i \sin \theta_i. \quad (4.11)$$

A aceleração da gravidade só tem uma componente vertical, então só muda a velocidade  $v_y$ . A velocidade  $v_x$  é, portanto, constante. Isso implica que as equações do MRU aplicam-se ao movimento horizontal. Além disso,  $|a| = |g|$  é constante, o que implica que o movimento vertical é regido pelas equações do MRUV. Ou seja:

$$\left. \begin{array}{l} x_f = x_i + v_{ix} \Delta t, \\ v_{fx} = v_{ix} = \text{constante;} \end{array} \right\} \text{MRU} \quad \left. \begin{array}{l} y_f = y_i + v_{iy} \Delta t - \frac{1}{2} g (\Delta t)^2, \\ v_{fy} = v_{iy} - g \Delta t. \end{array} \right\} \text{MRUV} \quad (4.12)$$

A variável  $t$  é a única variável comum às equações das componentes  $x$  e  $y$ . Vejamos uma aplicação de como conectar essas expressões no caso a seguir. Imagine que queremos encontrar a altura máxima  $h$  e o alcance  $R$  de um projétil, mostrados na figura ao lado.

A altura máxima é medida no ápice da trajetória, quando  $v_y = 0 \text{ m s}^{-1}$  (ponto A). Usando a equação para a velocidade do movimento em  $y$ ,

$$v_{yf} = v_{yi} - gt \Rightarrow 0 = v_i \sin \theta_i - gt_A, \quad (4.13)$$

$$t_A = \frac{v_i \sin \theta_i}{g}. \quad (4.14)$$

A altura nesse ponto é dada pela equação para a posição de um MRUV:

$$y_f = y_i + v_{yi} t - \frac{1}{2} g t^2; \quad (4.15)$$

$$h = (v_i \sin \theta_i) \frac{v_i \sin \theta_i}{g} - \frac{1}{2} g \left( \frac{v_i \sin \theta_i}{g} \right)^2 \quad (4.16)$$

$$h = \frac{v_i^2 \sin^2 \theta_i}{2g}, \quad (4.17)$$

na qual substituímos o resultado para  $t_A$  que acabamos de encontrar. A altura máxima é quando  $\sin^2 \theta_i = 1$ , o que implica  $\theta_i = 90^\circ$ . A altura é menor quanto menor o ângulo de lançamento.

O alcance é medido quando o projétil volta ao mesmo nível horizontal em que começou (ponto B). O intervalo de tempo entre o lançamento e  $t_A$  é o

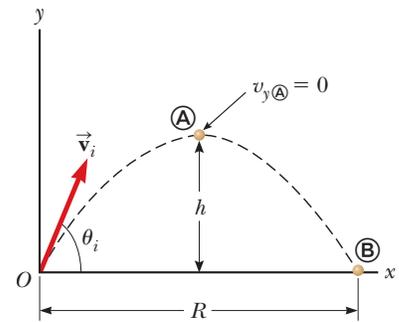


Figura 4.10: Serway & Jewett (2013).

mesmo que entre  $t_A$  e  $t_B$ . Ou seja,  $t_B = 2t_A$ . Usando a equação para a posição de uma partícula em MRU,

$$x_f = x_i + v_{xi}t, \quad (4.18)$$

$$R = v_{xi}t_B = (v_i \cos \theta_i)(2t_A) \quad (4.19)$$

$$= (v_i \cos \theta_i) \frac{2v_i \sin \theta_i}{g} \quad (4.20)$$

$$= \frac{2v_i^2 \sin \theta_i \cos \theta_i}{g}. \quad (4.21)$$

Portanto:

$$R = \frac{v_i^2 \sin 2\theta_i}{g}. \quad (4.22)$$

O alcance máximo é quando  $\sin 2\theta_i = 1$ , o que implica  $\theta_i = 45^\circ$ . Como o seno é de  $2\theta_i$ , e  $0 \leq \theta_i \leq 90^\circ$ , o alcance de ângulos complementares (por exemplo,  $15^\circ$  e  $75^\circ$ ) é o mesmo. A figura acima mostra a trajetória de projéteis para alguns ângulos de lançamento.

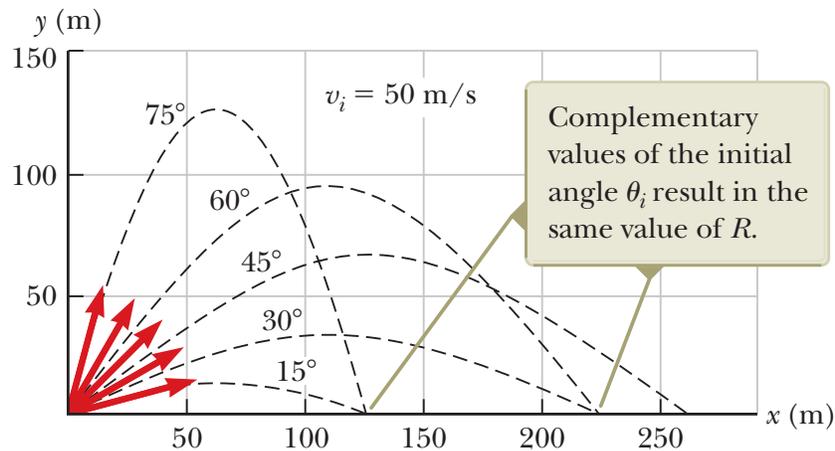


Figura 4.11: Serway & Jewett (2013).

### 4.3 Movimento circular uniforme

Vimos que a aceleração muda a velocidade. A mudança pode ser tanto do módulo da velocidade, quanto do seu sentido, quanto dos dois. A componente do vetor aceleração perpendicular à velocidade é responsável pela mudança do sentido do vetor velocidade.

Em um movimento circular uniforme, o módulo da velocidade é constante, mas o seu sentido muda a todo instante. A aceleração, portanto, é perpendicular à velocidade, e sempre aponta para o centro do círculo. A velocidade é um vetor sempre tangente à circunferência.

### 4.3.1 Quantidades angulares

Antes de analisarmos o movimento circular, é útil definir quantidades *angulares*. Elas são análogas às lineares:

$$x \leftrightarrow \theta,$$

$$v \leftrightarrow \omega,$$

$$a \leftrightarrow \alpha.$$

A posição angular é o ângulo varrido pelo corpo. Durante um intervalo de tempo  $dt$ , uma partícula  $P$  percorre um arco  $ds = r d\theta$ . O deslocamento angular em radianos é portanto:

$$d\theta = \frac{ds}{r}. \quad (4.23)$$

A velocidade angular instantânea é a taxa de variação do deslocamento angular da partícula:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}. \quad (4.24)$$

Aceleração angular (instantânea<sup>1</sup>) é a taxa de variação de  $\omega$ :

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}. \quad (4.25)$$

No caso de um movimento circular uniforme,  $\omega$  é constante e, portanto,  $\alpha = 0$ . Em uma volta completa o deslocamento angular é  $2\pi$  rad, e o tempo para que a partícula volte à mesma posição chama-se período ( $T$ ). Portanto, a velocidade angular, nesse caso, é dada por

$$|\omega| = \frac{2\pi \text{ rad}}{T}. \quad (4.26)$$

### 4.3.2 Relação entre grandezas angulares e lineares

A figura ao lado mostra uma partícula em movimento circular uniforme. A sua velocidade linear é sempre tangente a esta trajetória. A velocidade é a velocidade tangencial, e vale:

$$v = v_t = \frac{ds}{dt} = r \frac{d\theta}{dt}, \quad (4.27)$$

$$v = r\omega. \quad (4.28)$$

Podemos, portanto, expressar o período em função do módulo da velocidade da partícula

$$T = \frac{2\pi r}{v}. \quad (4.29)$$

A aceleração tem somente uma componente perpendicular à velocidade, que sempre aponta para o centro do círculo. Essa aceleração centrípeta é:

$$a = a_r = \frac{v_t^2}{r}, \quad (4.30)$$

$$a = a_r = r\omega^2. \quad (4.31)$$

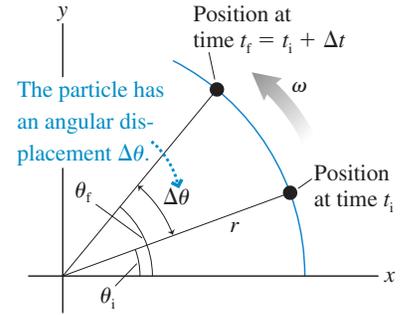


Figura 4.12: Knight (2013).

<sup>1</sup> A velocidade e a aceleração médias são dadas por  $\omega_{\text{med}} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$  e  $\alpha_{\text{med}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ .

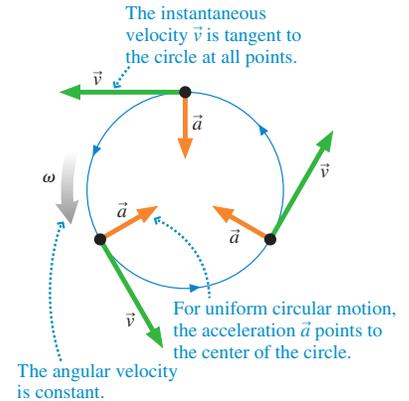


Figura 4.13: Knight (2013).

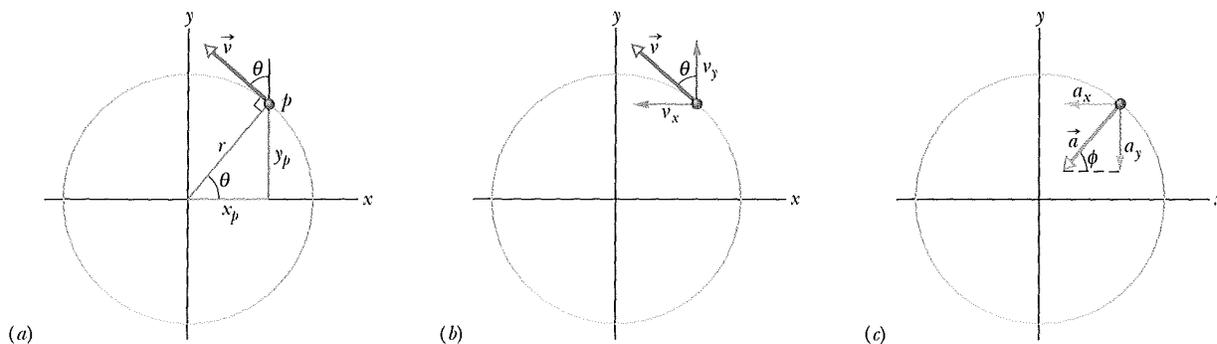


Figura 4.14: Halliday, Resnick &amp; Walker (2010).

Para demonstrar a equação anterior, podemos começa decompondo a velocidade  $\vec{v}$  em coordenadas retangulares:

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} = (-v \sin \theta) \hat{i} + (v \cos \theta) \hat{j}. \quad (4.32)$$

O seno e cosseno do ângulo podem ser reescritos em termos das coordenadas da posição da partícula:

$$\vec{v} = \left(-\frac{vy}{r}\right) \hat{i} + \left(\frac{vx}{r}\right) \hat{j}. \quad (4.33)$$

A aceleração é dada pela derivada da velocidade com o tempo:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(-\frac{v}{r} \frac{dy}{dt}\right) \hat{i} + \left(\frac{v}{r} \frac{dx}{dt}\right) \hat{j}. \quad (4.34)$$

Mas  $dy/dt = v_y = v \sin \theta$  e  $v_x = dx/dt = v \cos \theta$ . Assim,

$$\vec{a} = \left(-\frac{v^2}{r} \cos \theta\right) \hat{i} + \left(-\frac{v^2}{r} \sin \theta\right) \hat{j} \quad (4.35)$$

O módulo da aceleração é então

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{v^2}{r} \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \frac{v^2}{r}, \quad (4.36)$$

que é a equação que queremos demonstrar.

Além disso, podemos ver que  $\vec{a}$  sempre aponta para o centro do círculo.

O ângulo  $\phi$  da figura acima é dado por:

$$\tan \phi = \frac{a_y}{a_x} = \frac{-(v^2/r) \sin \theta}{-(v^2/r) \cos \theta} = \tan \theta. \quad (4.37)$$

Ou seja,  $\phi = \theta$ , e aceleração é, portanto, centrípeta.

#### 4.4 Movimento relativo

A figura ao lado mostra a posição de uma partícula  $P$ . Suponha que um observador escolha a origem do eixo  $x$  no ponto  $A$ , e outro no ponto  $B$ . No

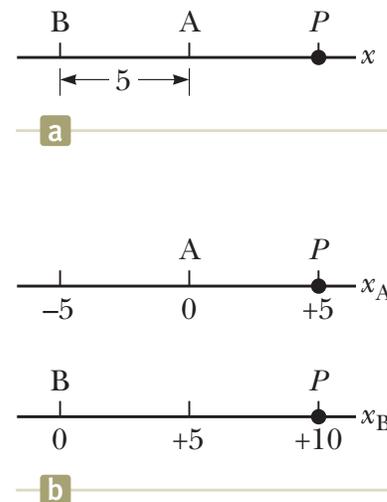


Figura 4.15: Serway &amp; Jewett (2013).

referencial A, a posição da partícula é 5 m, e no B é 10 m. Qual dessas medidas da posição está correta? Ambas estão corretas dentro de cada referencial considerado!

A figura ao lado mostra uma mulher e um homem em uma esteira rolante, e uma mulher fora. O homem está caminhando. A observadora fora da esteira percebe o homem caminhando com uma velocidade maior do que a na esteira. Qual observação corresponde à realidade? Ambas são observações válidas. A velocidade depende do referencial a partir do qual ela é medida, assim como a posição depende do referencial em que ela é medida.

Medidas feitas em referenciais em movimento são perfeitamente válidas. Na realidade, não é possível distinguir dois referenciais ditos inerciais. Um referencial inercial é definido tal que um objeto não sofre aceleração se não houver forças atuando sobre ele. O princípio da relatividade galileana diz que as leis da mecânica são as mesmas em todos os referenciais inerciais.

**PRINCÍPIO DA RELATIVIDADE DE GALILEU:** As leis da física são as mesmas para um observador que está se movendo a velocidade constante e para um observador parado. (Diálogo sobre os Dois Principais Sistemas do Mundo)

**PRINCÍPIO DA RELATIVIDADE DE NEWTON:** Movimento absoluto não pode ser detectado. (Princípios Matemáticos da Filosofia Natural)

SUPONHA uma partícula C em uma determinada posição  $\vec{r}_{CA}$  em um referencial inercial  $S_A$ . Queremos obter as coordenadas  $\vec{r}_{CB}$  dessa partícula em um outro referencial inercial  $S_B$ . Usando a soma geométrica de vetores, de acordo com a figura ao lado,

$$\vec{r}_{CB} = \vec{r}_{CA} + \vec{r}_{AB}, \quad (4.38)$$

onde  $\vec{r}_{AB}$  é o vetor que liga a origem do referencial B ao de A.

A partícula C pode ter uma velocidade diferente nos dois referenciais. Diferenciando a equação anterior,

$$\frac{d\vec{r}_{CB}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{CA}}{dt} + \frac{d\vec{r}_{AB}}{dt}; \quad (4.39)$$

$$\vec{v}_{CB} = \vec{v}_{CA} + \vec{v}_{AB}, \quad (4.40)$$

onde  $\vec{v}_{AB}$  é a velocidade do referencial A em relação ao referencial B. Note que  $\vec{v}_{AB} = -\vec{v}_{BA}$ . Essa relação é conhecida como *transformação de Galileu da velocidade*. Você já deve ter se deparado com ela no caso unidimensional, em que faz muito sentido: ela é a razão pela qual é sempre mais seguro andar de bicicleta na mesma mão do resto do tráfego.

A aceleração, por outro lado, é sempre a mesma em qualquer referencial inercial. Na verdade, a aceleração é a mesma em dois referenciais no caso mais genérico em que  $\vec{v}_{AB}$  é constante. Tomando a derivada da última equa-

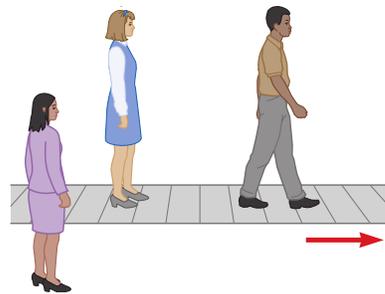


Figura 4.16: Serway & Jewett (2013).

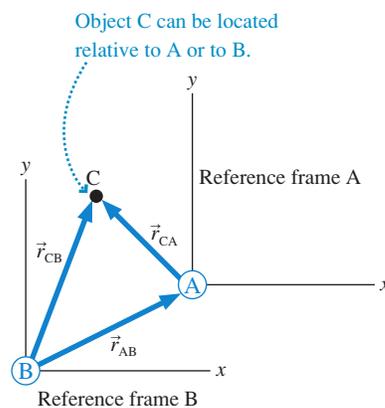


Figura 4.17: Knight (2013).

ção,

$$\frac{d\vec{v}_{CB}}{dt} = \frac{d\vec{v}_{CA}}{dt} + \frac{d\vec{v}_{AB}}{dt}; \quad (4.41)$$

$$\vec{a}_{CB} = \vec{a}_{CA}, \quad (4.42)$$

onde usamos  $d\vec{v}_{AB}/dt = 0$ .



## 5

*Leis de movimento*

Nos capítulos anteriores, estudamos a cinemática da partícula, que descreve seus movimentos. Passamos agora à dinâmica de partículas, que se interessa pelo que influencia o movimento. Existem dois conceitos importantes: o de força e o de massa.

## 5.1 Forças

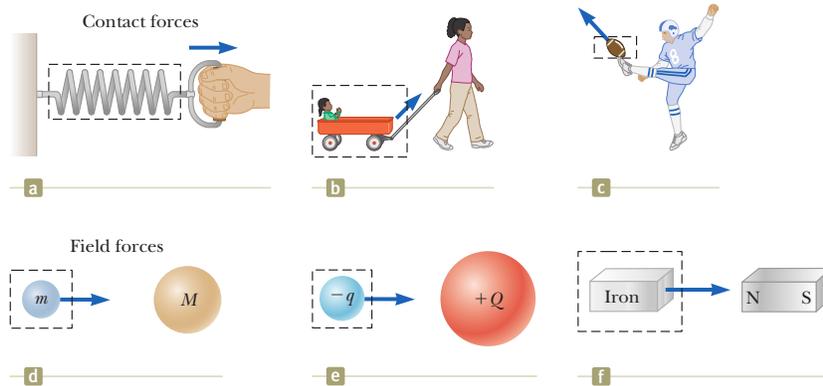


Figura 5.1: Serway & Jewett (2013).

Entendemos intuitivamente o conceito de força como um esforço que pode causar uma variação de velocidade em um objeto (mas nem sempre! A força aplicada pode ser em vão). A figura acima mostra diferentes forças macroscópicas. Algumas forças são de contato, e outras são de campo (cuja ação é à distância).

As forças fundamentais são quatro: gravitacional (entre partículas), eletromagnética (entre cargas), forte (de longo alcance entre hádrons, é a força que mantém prótons e nêutrons juntos no núcleo atômico) e fraca (de curto alcance, entre partículas que trocam bósons W e Z). Em mecânica clássica, nos preocupamos com as duas primeiras forças.

## 5.2 As leis de Newton

As leis de Newton, em geral, são expressas com os nomes não muito elucidativos de primeira, segunda, e terceira lei. Prefiro os nomes descritivos das leis, e acho mais lógicos apresentá-las em outra ordem. Primeiro, uma lei define que forças são interações entre corpos. Segundo, uma lei define referenciais inerciais se um corpo está isolado. Por fim, em um referencial inercial, a última lei diz que a mudança de movimento em um corpo é proporcional à resultante das forças.

LEI DA AÇÃO E REAÇÃO (terceira lei de Newton):

Forças são interações entre corpos. Toda força ocorre em um par de forças de ação e reação. O par de forças atua em dois corpos *distintos*. O módulo das forças é igual, e os vetores forças têm sentidos opostos (ver figura ao lado).

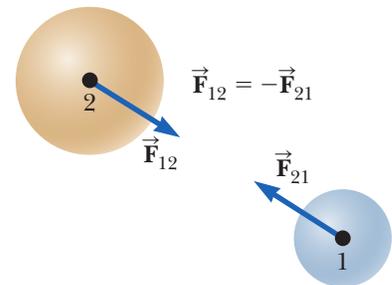


Figura 5.2: Serway & Jewett (2013).

LEI DA INÉRCIA (primeira lei de Newton):

Se um corpo não interage com outros corpos, é possível identificar um referencial (dito inercial) em que o corpo tem aceleração nula.

Essa lei também pode ser expressa como:

Na ausência de forças externas, visto de um referencial inercial, um objeto em repouso permanece em repouso, e um objeto em movimento permanece em movimento com velocidade constante (i.e. em linha reta).

LEI DA ACELERAÇÃO (segunda lei de Newton):

Em um referencial inercial (definido pela lei da inércia), a aceleração de um corpo é inversamente proporcional à sua massa e diretamente proporcional à resultante das forças que agem sobre ele.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{\text{res}}}{m} = \frac{\sum_i \vec{F}_i}{m} \quad (5.1)$$

### 5.2.1 Diagrama de corpo livre

Um recurso importante para entender forças resultantes em um corpo são diagramas de corpo livre. Esses diagramas são uma representação pictórica de todas as forças atuando no movimento. Dicas: (a) Identifique todas as forças atuando no objeto. (b) Desenhe um sistema de coordenadas. (c) Desenhe o corpo na origem do sistemas, e desenhe os vetores para a força. (d) Desenhe o vetor da força resultante.

## 5.3 Força gravitacional

MASSA

Imagine uma bola de papel e uma bola de basquete. Qual delas é mais difícil arremessar? Por quê? A resposta está ligada à propriedade dos objetos que *resiste* à mudança de movimento; essa propriedade é a *massa inercial*.

A massa de um objeto está definida como a constante de proporcionalidade na segunda lei de Newton. Quanto maior a massa, dada a mesma força, menor é a aceleração de um objeto. Ela é uma propriedade intrínseca de um objeto.

#### FORÇA GRAVITACIONAL

A figura ao lado mostra dois corpos de massas  $m_1$  and  $m_2$ , cujos centros estão a uma distância  $r$ . A lei da gravitação de Newton diz que a força entre esses dois corpos é

$$F_{1 \text{ em } 2} = F_{2 \text{ em } 1} = \frac{Gm_1m_2}{r^2}, \quad (5.2)$$

onde  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$  é a constante gravitacional.

Se a força gravitacional é dominada por um corpo de massa  $M$ , podemos escrever

$$F_G = m \frac{GM}{r^2}; \quad (5.3)$$

$$\Rightarrow \vec{F}_G = m \vec{g}, \quad (5.4)$$

onde  $\vec{g}$  é a aceleração da gravidade em determinado ponto do espaço. Note que  $\vec{g}$  é causado pela força de atração gravitacional: quanto mais próximo de uma massa grande, maior ela será. Na superfície da Terra,  $g \sim 9,80 \text{ m s}^{-2}$ ; mas no topo de uma montanha  $g \sim 9,77 \text{ m s}^{-2}$ .

A aceleração de queda livre,  $g$ , é independente da massa do corpo, como já tínhamos visto anteriormente.

Na equação anterior, a massa é uma *massa gravitacional*, pois é a constante de proporcionalidade entre a força gravitacional e aceleração gravitacional. Experimentos mostram que a *massa inercial*, expressa pela segunda lei de Newton, é igual à massa gravitacional. Essa igualdade é o postulado no qual a teoria da relatividade geral proposta por Einstein está fundamentada.

#### PESO

No dia-a-dia, usamos massa e peso como dois termos equivalentes. Em física, peso se refere à força gravitacional no objeto. Um objeto que tem massa de  $m = 2 \text{ kg}$  tem essa massa na Terra ou na Lua. O seu peso na Terra é  $\sim 20 \text{ N}$ , mas na Lua é  $\sim 3 \text{ N}$ , já que a aceleração da gravidade na superfície da Lua é aproximadamente um sexto do da superfície da Terra.<sup>1</sup>

Peso é uma medida; a figura ao lado mostra uma balança com mola. Se a balança e o objeto estão em repouso em relação à Terra, a força com que a mola empurra o objeto colocado na balança é igual força gravitacional exercida pelo objeto na mola.

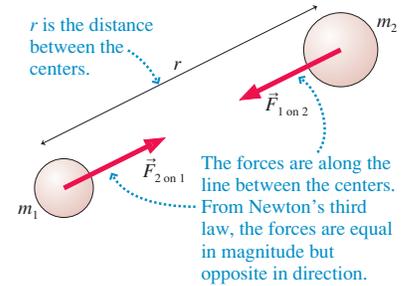


Figura 5.3: Knight (2013).

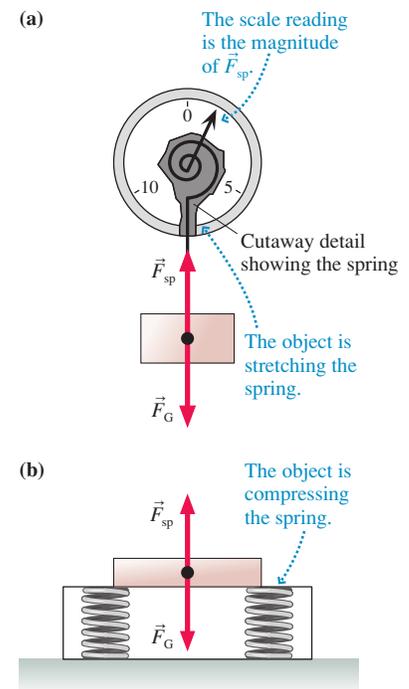


Figura 5.4: Knight (2013).

<sup>1</sup> Veja o peso de objetos em outros mundos.

Se tentamos medir o peso de um objeto na presença de uma aceleração extra, no entanto, a balança irá mostrar um peso diferente. Considere a pessoa ao lado em um elevador acelerando para cima. A força resultante é para cima, o que implica que a força exercida pela mola na pessoa é maior que a força gravitacional:

$$(F_{\text{net}})_y = (F_{\text{sp}})_y + (F_G)_y = F_{\text{sp}} - mg = ma_y. \quad (5.5)$$

Portanto, é útil definir o peso como o peso de um objeto estacionário. No entanto, a *sensação* de peso que temos é devido às forças de contato. Em aviões que fazem voos ‘zero-G’ e astronautas em estações espaciais, a sensação de não ter peso é devido ao fato de estarem em queda livre. É a mesma sensação de estar em um elevador caindo, ou durante os primeiros instantes antes de abrir um paraquedas. Na estação espacial, todos os objetos estão o tempo todo em queda livre, sem nunca atingir o chão.<sup>2</sup>

#### 5.4 Força de atrito

A força de atrito é a responsável por muito do que fazemos no dia-a-dia, inclusive andar. A figura ao lado mostra o que acontece do ponto de vista microscópico. As superfícies não são lisas. O quanto de contato existe entre as superfícies depende de quão comprimidas uma com a outra estão (o que depende, portanto, da força normal).

Nos pontos em contato, os átomos das duas superfícies criam ligações eletrônicas. Para separar as superfícies, é necessário quebrar essas ligações. Uma vez as ligações quebradas, ainda existe força atrativa entre os pontos de contato, mas há menos tempo para que elas se estabeleçam. É mais fácil manter uma superfície deslizando em outra do que vencer o atrito inicial entre as superfícies. Uma camada de líquido (água, gelo derretendo) ou gás entre as superfícies diminuem os pontos de contato e minimizam o atrito.

O atrito *estático* é a força que faz com que um corpo não deslize. A figura ao lado mostra uma pessoa empurrando uma caixa que está em equilíbrio estático, e não sai do lugar. Por que a caixa está em equilíbrio estático, a força de atrito estático,  $\vec{f}_e$  tem módulo igual e sentido oposto à força  $\vec{F}_{\text{emp}}$  com a qual ela está sendo empurrada:

$$\vec{f}_e = -\vec{F}_{\text{emp}}. \quad (5.6)$$

O atrito estático é uma resposta à uma força aplicada.

Se a força aplicada é grande o suficiente, o objeto se move. Portanto, a força de atrito estático tem um valor máximo, que experimentos mostram ser proporcional à força normal  $N$ :

$$f_{e, \text{máx}} = \mu_e N, \quad (5.7)$$

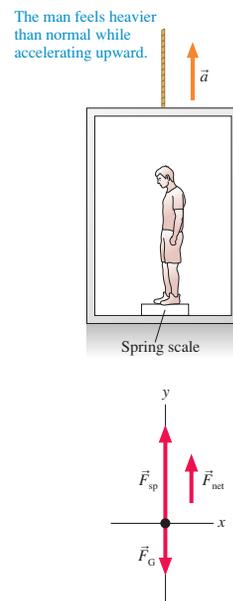


Figura 5.5: Knight (2013).

<sup>2</sup> ‘The Guide says there is an art to flying, said Ford, or rather a knack. The knack lies in learning how to throw yourself at the ground and miss.’ – Douglas Adams, em *Life, the Universe and Everything*.

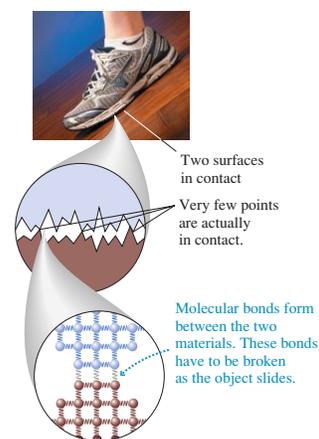


Figura 5.6: Knight (2013).

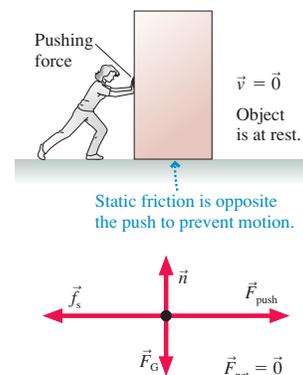


Figura 5.7: Knight (2013).

onde a constante de proporcionalidade  $\mu_e$  é chamada de coeficiente de atrito estático. Portanto, um objeto fica em repouso se  $f_e < f_{e, \text{máx}}$ , desliza se  $f_e = f_{e, \text{máx}}$ , e está em movimento – portanto, não existe mais atrito *estático* – se  $f_e > f_{e, \text{máx}}$ .

Como comentamos na descrição microscópica do atrito estático, a força de atrito é menor quando o objeto não está mais em repouso. A figura ao lado mostra essa situação: agora existe um atrito *cinético*,  $f_c < f_{e, \text{máx}}$ .

O sentido de  $\vec{f}_c$  é oposto ao da força com que o objeto está sendo empurrado, e o seu valor é proporcional à força normal:

$$f_c = \mu_c N, \tag{5.8}$$

onde  $\mu_c$  é o coeficiente de atrito cinético. A tabela ao lado mostra vários coeficientes de atrito estático e cinético para a interação entre superfícies diversas. Note que  $\mu_c < \mu_e$ .

A figura a seguir mostra um gráfico idealizado da força de atrito. A parte à esquerda, com o rótulo *at rest*, mostra o atrito estático, para o corpo em repouso. A parte à direita mostra o corpo em aceleração, em que a força de atrito é cinética.

Atribui-se a Leonardo da Vinci os primeiros estudos das forças de atrito. Charles Coulomb, no século XVIII, fez vários experimentos ressaltando a diferença entre os dois tipos de atrito.

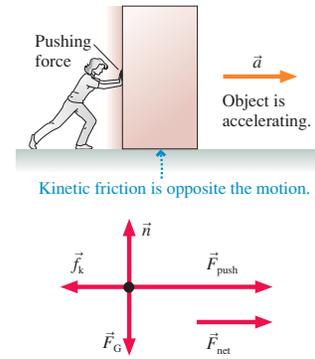
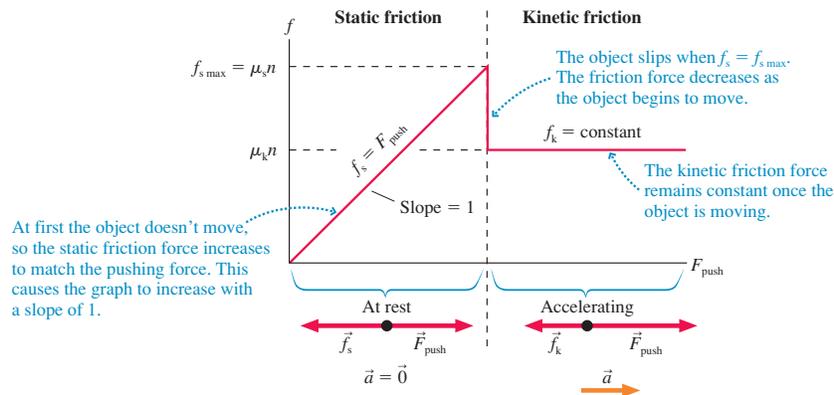


Figura 5.8: Knight (2013).

Materials	Static	Kinetic
	$\mu_s$	$\mu_k$
Rubber on concrete	1.00	0.80
Steel on steel (dry)	0.80	0.60
Steel on steel (lubricated)	0.10	0.05
Wood on wood	0.50	0.20
Wood on snow	0.12	0.06
Ice on ice	0.10	0.03

Figura 5.9: Knight (2013).

Figura 5.10: Knight (2013).

### 5.5 Força no movimento circular

Na Seção 4.3, descrevemos o movimento circular uniforme. A velocidade é tangencial ( $v_t$ ) ao movimento. Como o módulo da velocidade é constante, e apenas seu sentido varia, vimos que existe somente uma componente centrípeta da aceleração ( $a_r$ ), que vale

$$a_r = \frac{v_t^2}{r}, \tag{5.9}$$

onde  $r$  é o raio do círculo descrito pelo corpo.

Se existe uma aceleração centrípeta, ela é causada por uma força resultante centrípeta, de módulo constante, no corpo em movimento circular uniforme. A figura ao lado mostra um disco em MCU sendo puxado por uma corda. Nesse exemplo, a força centrípeta resultante é a força da corda puxando o disco. Se a corda fosse cortada, segundo a lei da inércia de Newton, o disco ia passar a se mover em linha reta, em uma trajetória tangente ao círculo.

Note que a força centrípeta não é uma força causada por uma interação, como, por exemplo, a força gravitacional, a normal, ou de atrito. O termo *força centrípeta* descreve simplesmente a força resultante para que uma partícula tenha uma trajetória circular.

Aplicando a lei da aceleração de Newton, temos que a resultantes das forças em um MCU é

$$\sum F = ma_r = m \frac{v_t^2}{r} \quad (5.10)$$

A figura ao lado mostra os vetores para a resultante da força, a aceleração centrípeta, e a velocidade da partícula em um dado instante de tempo.

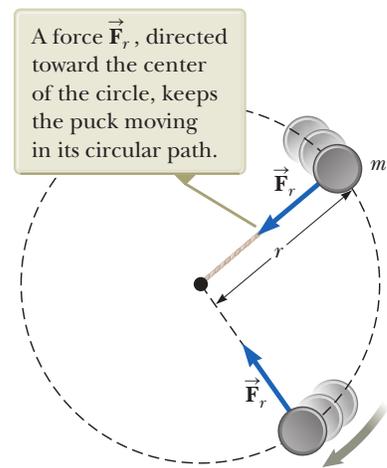


Figura 5.11: Serway & Jewett (2013).

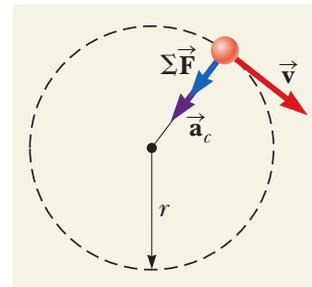


Figura 5.12: Serway & Jewett (2013).

## 6

*Energia*

Os termos posição, deslocamento, velocidade, e até força são palpáveis. O termo energia é mais abstrato; em geral associamos ao uso de combustível (tanto em veículos como em processos biológicos). Mesmo sendo um termo um pouco abstrato no dia-a-dia, o termo energia é muito útil em Física. Começemos pela definição de trabalho, que é mais concreta, para depois passar para definições de diferentes tipos de energia.

A análise de vários sistemas é mais simples usando o conceito de energia do que aplicando as leis de Newton.

6.1 *Trabalho realizado por forças*

O termo *trabalho* em Física é bem diferente do que usamos no dia-a-dia. Em Física, o trabalho quantifica quão efetiva é uma a força aplicada para mover um objeto.

Imagine que você está empurrando um objeto no chão. Se você empurra na vertical, ele não vai se mexer. Sua força foi completamente desperdiçada. Se você empurra horizontalmente, sua força vai toda para o movimento do objeto. Se você empurra em um ângulo com a horizontal, parte é desperdiçada empurrando o objeto contra o chão. Portanto, a efetividade da força para mover um objeto depende do *ângulo* de aplicação da força em relação ao deslocamento. Além disso, se a força é maior e se o deslocamento é maior, a 'efetividade' também é maior.

O *trabalho*  $W$  realizado por uma *força constante* é

$$W \equiv \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = F \Delta r \cos \theta, \quad (6.1)$$

onde  $\Delta r$  é o módulo do deslocamento a partir da aplicação da força,  $\theta$  é o ângulo entre os vetores força e deslocamento, e usamos a definição do produto escalar (Seção 3.4.2). Note que  $W$  é um escalar, e no SI tem unidades de joule (J).

Para uma *força variável*, o trabalho para cada pequeno deslocamento é

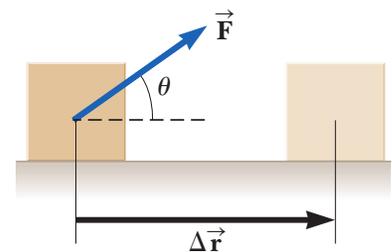


Figura 6.1: Serway & Jewett (2013).

dado por

$$W = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} F_x \Delta x. \quad (6.2)$$

O trabalho total é a soma dos trabalhos para cada deslocamento infinitesimal – sim, uma integral!

$$W = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x_i}^{x_f} F_x \Delta x = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx. \quad (6.3)$$

No caso geral de várias forças externas, e para o caso que o sistema pode ser modelado como uma partícula, temos que o trabalho realizado por um agente *externo* no sistema é dado por

$$\sum W = W_{\text{ext}} = \int (\sum \vec{F}) \cdot d\vec{r}. \quad (6.4)$$

No caso de um sistema deformável, que não pode ser modelado como uma partícula, temos que primeiro calcular o trabalho de cada força e depois somá-los:

$$\sum W = W_{\text{ext}} = \sum_{\text{forças}} \left( \int \vec{F} \cdot d\vec{r} \right). \quad (6.5)$$

## 6.2 Energia cinética e o teorema trabalho-energia

O trabalho expressa a transferência de energia para o sistema. Uma consequência da transferência de energia pode ser o aumento da velocidade do sistema, expresso em termos do aumento da *energia cinética* do sistema.

Considere o sistema ao lado, em que a resultante das forças no eixo  $x$  é dada por  $\Sigma F$ . O trabalho realizado por essa força resultante é

$$W_{\text{ext}} = \int_{x_i}^{x_j} \Sigma F dx. \quad (6.6)$$

Usando a lei da aceleração de Newton,  $\Sigma F = ma$ , temos

$$W_{\text{ext}} = \int_{x_i}^{x_j} ma dx = \int_{x_i}^{x_j} m \frac{dv}{dt} dx = \int_{x_i}^{x_j} m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} dx = \int_{v_i}^{v_f} mv dv, \quad (6.7)$$

onde  $v_i$  e  $v_f$  são as velocidade inicial e final do sistema. Resolvendo a integral,

$$W_{\text{ext}} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2. \quad (6.8)$$

Apesar de partirmos do caso unidimensional, essa expressão é válida para o caso de três dimensões. Se  $v_f > v_i$ , o trabalho realizado aumentou a quantidade  $mv^2/2$  do sistema. Chamamos essa quantidade de energia cinética,

$$K \equiv \frac{1}{2}mv^2 \quad (6.9)$$

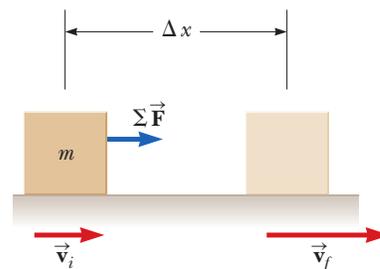


Figura 6.2: Serway & Jewett (2013).

A relação entre trabalho e energia cinética é, portanto,

$$W_{\text{ext}} = K_f - K_i = \Delta K. \quad (6.10)$$

Essa expressão é chamada de teorema trabalho–energia cinética: quando um trabalho é realizado em um sistema e a única mudança é na velocidade do sistema, o trabalho realizado é igual à variação da energia cinética do sistema.

Note que o trabalho pode ser positivo ou negativo: positivo se energia cinética entra no sistema, e negativo se energia cinética sai do sistema.

### 6.3 Energia potencial

Considere um sistema constituído pela Terra e por um livro. Imagine que colocamos um livro em um lugar mais alto em relação ao solo, e que ele estava em repouso antes e depois de mudarmos a *configuração* do sistema. Não houve mudança de energia cinética do sistema. No entanto, se o livro cair do local final, a sua energia cinética irá aumentar.

Como aumentamos o *potencial* da energia cinética do sistema aumentar, associamos essa nova configuração do sistema a um aumento na sua *energia potencial*.

O trabalho que um agente externo faz ao mudar a configuração do sistema livro (ou outra partícula) e Terra é

$$W_{\text{ext}} = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = (mg\hat{j}) \cdot [(y_f - y_i)\hat{j}] = mgy_f - mgy_i. \quad (6.11)$$

Como no caso da energia cinética, associamos o termo  $mgy$  a uma quantidade de energia que aumenta no sistema. Essa energia é chamada de *energia potencial gravitacional*,

$$U_g \equiv mgy; \quad (6.12)$$

e o trabalho é dado por

$$W_{\text{ext}} = \Delta U_g. \quad (6.13)$$

Existem outros tipos de energia potencial, como a potencial elástica, elétrica, etc.

### 6.4 Conservação de energia

Pelo teorema de Noether, a energia é a quantidade conservada devido à invariância das leis da Física em relação a transformações temporais.<sup>1</sup> Isso não é válido para o Universo como um todo, mas é verdade em escalas não cosmológicas. Para os nossos propósitos, vamos considerar a energia de qualquer sistema físico fechado é conservada.

Considere a figura ao lado. Ela mostra um livro que foi empurrado em cima de uma mesa, e agora está desacelerando devido à força de atrito entre

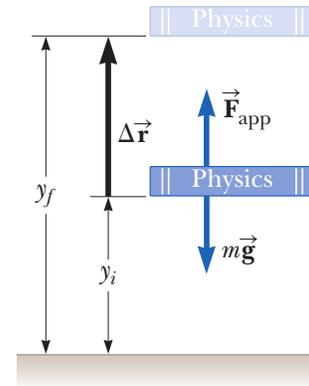


Figura 6.3: Serway & Jewett (2013).

<sup>1</sup> Veja mais detalhes neste vídeo de Sabine Hossenfelder.

o livro e a mesa. Os painéis (b) a (d) mostram gráficos da energia cinética, energia interna e energia total. Inicialmente, em (b), o livro tem energia cinética máxima. Em (c), a força de atrito converte energia cinética em energia térmica (as superfícies da mesa e do livro esquentam). Em (d), toda a energia cinética do livro virou energia térmica, e o livro parou. Note que todos os gráficos da energia total estão no mesmo valor: o sistema *isolado* livro–mesa não perdeu nem ganhou energia.

Portanto, para um sistema *isolado*, em que não há troca de energia entre o meio e agentes externos (e, portanto, nenhum trabalho sendo feito no ou pelo o sistema), a energia total é conservada.

No entanto, existem energias mais úteis do que outras. É muito difícil usar a energia térmica causada pelo atrito para fazer o livro adquirir uma velocidade de novo. Por outro lado, se dermos energia potencial ao livro, colocando mais acima da mesa, é muito fácil que essa energia seja convertida em energia cinética. Definimos a *energia mecânica* como a soma dessas ‘energia úteis’, a cinética e potencial:

$$E_{\text{mec}} = K + U. \tag{6.14}$$

Forças conservativas conservam a energia mecânica do sistema; forças não-conservativas transformam parte de energia mecânica em formas de energia menos úteis. A seguir vamos definir como identificar forças conservativas e não-conservativas.

### 6.4.1 Forças conservativas

Quando discutimos a energia potencial gravitacional, vimos que a variação dessa energia depende apenas do ponto inicial  $y_i$  e do ponto final  $y_f$ . A figura ao lado mostra uma partícula em um campo gravitacional. O trabalho realizado pela força gravitacional independe da trajetória da partícula. A força gravitacional é um exemplo de força conservativa.

O trabalho realizado por uma *força conservativa* em uma partícula que se move entre dois pontos *independe da trajetória* da partícula. Portanto, o trabalho realizado em uma partícula por uma força conservativa em uma trajetória fechada é nulo. Além disso, sempre podemos definir uma *energia potencial* associada a qualquer força conservativa.

Tomemos o caso da força gravitacional. O trabalho realizado por essa força para levar uma partícula de um ponto inicial  $i$  a um ponto final  $f$  é

$$W_g = -mg\hat{j} \cdot [(y_j - y_i)\hat{j}] = mgy_i - mgy_f \tag{6.15}$$

Note que essa equação é muito parecida com a eq. (6.11), a menos de um sinal negativo em  $mg\hat{j}$ . A diferença lá é que a força relevante é uma força externa ao sistema Terra–livro, que é a força aplicada, que se contrabalança à força gravitacional e vale, portanto,  $mg\hat{j}$ . A força da equação acima é *interna* ao sistema Terra–livro, e é a força gravitacional da Terra no livro,  $-mg\hat{j}$ .

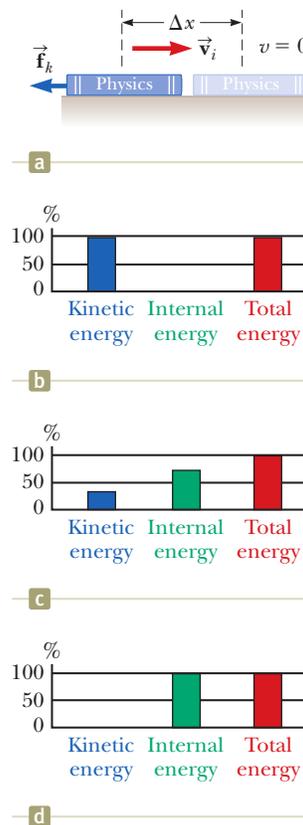


Figura 6.4: Serway & Jewett (2013).

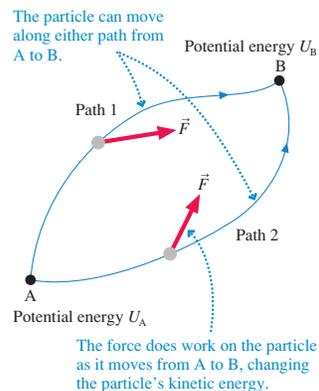


Figura 6.5: Knight (2013).

### 6.4.2 Relação entre forças conservativas e energia potencial

Da eq. (6.15), temos que o trabalho de uma força conservativa interna ao sistema é igual ao negativo da variação da energia potencial:

$$W_{\text{int}} = -\Delta U. \quad (6.16)$$

Podemos escrever, portanto,

$$\Delta U = U_f - U_i = - \int_{x_i}^{x_j} F_x dx \quad (6.17)$$

Isso significa que a força conservativa é dada por

$$F_x = -\frac{dU}{dx}. \quad (6.18)$$

### 6.4.3 Forças não conservativas

A figura ao lado mostra um livro sendo arrastado em uma mesa horizontal, no qual a força de atrito é não-nula. A força de atrito é sempre contrária ao movimento do livro, e o seu trabalho é, para um pedaço infinitesimal  $ds$  da trajetória,  $dW_{\text{atr}} = \vec{f}_c \cdot d\vec{s} = -\mu_c mg ds$ . Integrando para toda a trajetória,  $W_{\text{atr}} = -\mu_k mg \Delta s$ , ou seja, o trabalho da força de atrito é maior quanto maior o deslocamento  $\Delta s$ .

Se o trabalho realizado por uma força em uma partícula que se move entre dois pontos depende da trajetória da partícula, essa é uma *força não conservativa*. Um exemplo é a força de atrito, que é uma força dissipativa.

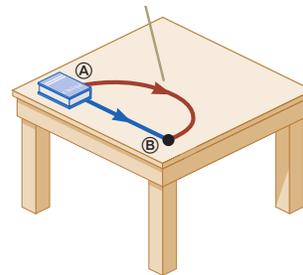
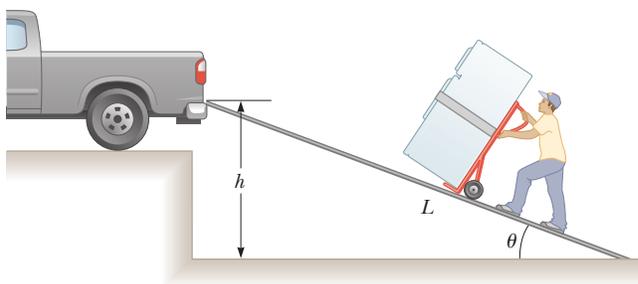


Figura 6.6: Serway & Jewett (2013).

## 6.5 Potência



Considere a figura acima. Desprezando perdas de energia mecânica, para transportar a geladeira para o caminhão, a pessoa tem que realizar o mesmo trabalho,  $mgh$ , independente da inclinação da rampa. Se a rampa for menos inclinada (menor  $\theta$ ), no entanto, a distância será maior, e a pessoa irá realizar menos trabalho por unidade de comprimento. Se ela empurra a geladeira a uma velocidade constante com a rampa mais ou menos inclinada, o trabalho por unidade de tempo será menor para a rampa menos inclinada.

Figura 6.7: Serway & Jewett (2013).

A *potência média* em um intervalo de tempo  $\Delta t$  é

$$P_{\text{med}} = \frac{W}{\Delta t}. \quad (6.19)$$

Portanto, a potência para transportar a geladeira será provavelmente menor no caso de uma rampa menos inclinada, que implicaria em um  $\Delta t$  maior.

Definimos a *potência instantânea* como a taxa de transferência de energia por unidade de tempo,

$$P \equiv \frac{dE}{dt}. \quad (6.20)$$

Lembrando que  $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , podemos escrever

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (6.21)$$

No SI, a unidade da potência é o watt ( $W = J s^{-1}$ ).

## 7

*Momento linear*

O teorema de Noether define a energia como a grandeza física conservada devido à invariância das leis da física com o tempo. Outra grandeza física associada com simetrias físicas é o *momento linear* (o que Newton chamou de *quantidade de movimento*). A invariância de sistemas físicos com respeito à translação espacial – as leis da física são as mesmas em qualquer local do espaço – implica na lei da conservação do momento linear.

O momento é muito útil para modelos que envolvem a colisão de partículas e a propulsão de foguetes, e esse é o tema deste capítulo. Vamos ver também o conceito de centro de massa: sistemas de várias partículas podem ser descritos por uma partícula única localizada no centro de massa do sistema.

A conservação de energia e de momento linear são usadas com muita frequência em outros domínios da física. O espalhamento Compton, por exemplo, que é um fenômeno quântico, usa o princípio da conservação dessas duas grandezas físicas para calcular a mudança do comprimento de onda de fótons após colidirem com elétrons livres.

7.1 *Momento linear e segunda lei de Newton*

Considere um sistema isolado composto pelas duas partículas ao lado, de massas  $m_1$  e  $m_2$  e com velocidades  $\vec{v}_1$  and  $\vec{v}_2$ . A única força agindo em cada partícula é devido à outra partícula; pela lei de Newton da ação e reação,

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}, \quad (7.1)$$

$$\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = 0. \quad (7.2)$$

Ou seja, a força resultante de um sistema isolado (ou a soma das forças internas) é nula.

Da lei da aceleração de Newton, podemos escrever

$$m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 = 0, \quad (7.3)$$

$$m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} = 0, \quad (7.4)$$

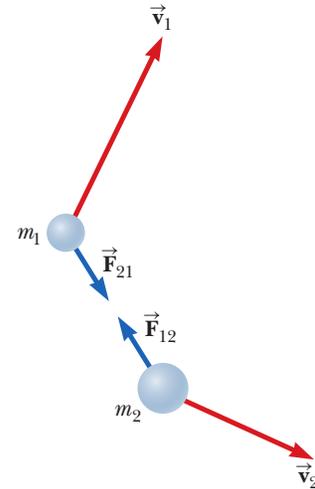


Figura 7.1: Serway & Jewett (2013).

onde usamos a definição da aceleração instantânea.

Se as massas são constantes, então elas podem ir para dentro da derivada:

$$\frac{d(m_1 \vec{v}_1)}{dt} + \frac{d(m_2 \vec{v}_2)}{dt} = 0, \quad (7.5)$$

$$\frac{d}{dt}(m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) = 0. \quad (7.6)$$

A quantidade  $m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$ , portanto, é uma constante em um sistema isolado. Note que temos a mesma expressão para as duas partículas. Essa grandeza física é o que definimos como momento linear de uma partícula:

$$\vec{p} \equiv m \vec{v}. \quad (7.7)$$

Note que  $\vec{p}$  é uma grandeza vetorial, diferente da energia.

A lei de Newton da aceleração é

$$\sum \vec{F} = m \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (7.8)$$

Essa expressão acima supõe que a massa é constante. De forma mais geral,

$$\sum \vec{F} = \frac{d(m \vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (7.9)$$

Essa é a expressão original da lei de Newton para o momento linear. Ela é mais genérica e vale para quando um corpo perde massa – por exemplo, na propulsão de foguetes.

## 7.2 Conservação do momento linear

Em um sistema isolado, a resultante das forças externas é nula. Para duas partículas,

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0. \quad (7.10)$$

Isso implica que o momento total do sistema é constante:

$$(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \vec{p}_{\text{tot}} = \text{constante}. \quad (7.11)$$

Isso é equivalente a dizer que o momento total inicial é igual ao final,

$$\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}. \quad (7.12)$$

Note que a expressão acima é vetorial, e é válida em cada uma das coordenadas espaciais.

## 7.3 Variação do momento em sistema não isolado

Se o sistema não está isolado e existe uma força resultante externa, podemos reescrever a equação (7.9) como

$$d\vec{p} = \sum \vec{F} dt. \quad (7.13)$$

Integrando com respeito ao tempo,

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \sum \vec{F} dt. \quad (7.14)$$

A essa quantidade física damos o nome de *impulso*:

$$\vec{I} \equiv \int_{t_i}^{t_f} \sum \vec{F} dt. \quad (7.15)$$

O impulso tem o mesmo sentido que a variação do momento. Ele não é uma propriedade da partícula, e sim uma medida de mudança do momento por uma força externa. A interpretação gráfica do módulo do impulso é dada pela figura seguinte.

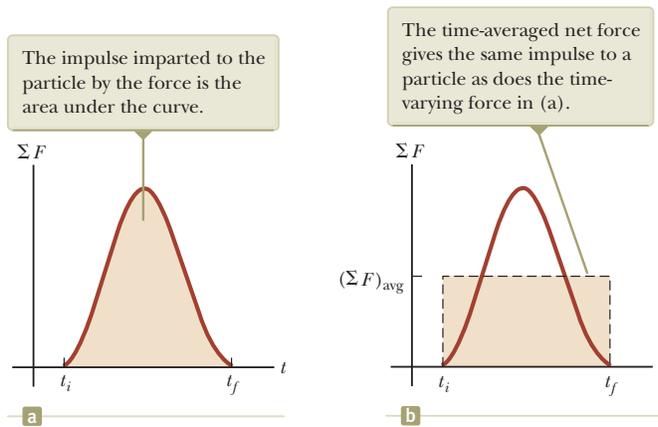


Figura 7.2: Serway & Jewett (2013).

O impulso é a área embaixo da curva de  $\sum F$  contra  $t$ . Essa área pode ser expressa como a área de um retângulo equivalente, com uma força equivalente média aplicada no mesmo intervalo de tempo. Essa força média é calculada como

$$\left(\sum \vec{F}\right)_{\text{med}} \equiv \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i}^{t_f} \sum \vec{F} dt. \quad (7.16)$$

### 7.4 Centro de massa

O movimento translacional de um sistema de partículas (ou de um corpo extenso) pode ser descrito pelo movimento do seu *centro de massa*. O movimento é como se houvesse uma única partícula com toda a massa do sistema no local do centro de massa. Essa é a hipótese por trás do modelo de partícula, que usamos em todo esse curso.

Considere duas partículas. O centro de massa está mais próximo da partícula de maior massa. A posição do centro de massa na coordenada  $x$  é

$$x_{\text{CM}} \equiv \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}. \quad (7.17)$$

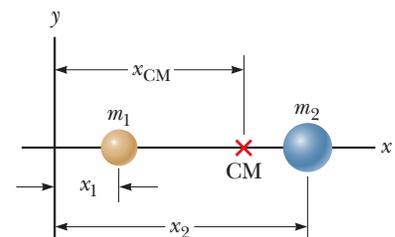


Figura 7.3: Serway & Jewett (2013).

Para um sistema de  $n$  partículas,

$$x_{\text{CM}} \equiv \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \cdots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum m_i x_i}{M}, \quad (7.18)$$

onde  $x_i$  é a posição da partícula  $i$  no eixo  $x$ , e  $M \equiv \sum_i m_i$  é a massa total.

Podemos escrever o mesmo nas outras dimensões espaciais  $y$  e  $z$ . O vetor posição do centro de massa é, portanto,

$$\vec{r}_{\text{CM}} = x_{\text{CM}} \hat{i} + y_{\text{CM}} \hat{j} + z_{\text{CM}} \hat{k} \quad (7.19)$$

$$= \frac{1}{M} \sum_i m_i x_i \hat{i} + \frac{1}{M} \sum_i m_i y_i \hat{j} + \frac{1}{M} \sum_i m_i z_i \hat{k} \quad (7.20)$$

$$= \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i, \quad (7.21)$$

onde  $\vec{r}_i$  é o vetor posição de cada partícula  $i$ .

Para um corpo extenso, constituído por inúmeras partículas de massas infinitesimais  $dm$ , nossa soma passa a ser uma integral,

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm. \quad (7.22)$$

Podemos portanto definir a velocidade do centro de massa,

$$\vec{v}_{\text{CM}} = \frac{d\vec{r}_{\text{CM}}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{v}_i \Rightarrow \quad (7.23)$$

$$M \vec{v}_{\text{CM}} = \sum_i m \vec{v}_i = \sum_i \vec{p}_i = \vec{p}_{\text{tot}}. \quad (7.24)$$

Veja a elegância dessa expressão: o momento linear total é igual ao momento linear equivalente a uma partícula de massa  $M$  com velocidade igual à do centro de massa.

Podemos também escrever a aceleração do centro de massa,

$$\vec{a}_{\text{CM}} = \frac{d\vec{v}_{\text{CM}}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{a}_i \Rightarrow \quad (7.25)$$

$$M \vec{a}_{\text{CM}} = \sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i \vec{F}_i, \quad (7.26)$$

onde  $\vec{F}_i$  é a força resultante na  $i$ -ésima partícula. As forças internas, no entanto, se anulam: a força da partícula 1 na 2 é igual à menos a força da 2 na 1. Portanto, a soma das forças dada acima é simplesmente a soma das forças externas:

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = M \vec{a}_{\text{CM}}. \quad (7.27)$$

Portanto, a lei de Newton da aceleração se aplica tanto a uma partícula quanto ao centro de massa de um corpo extenso ou de um sistema de partículas.

O CENTRO DE MASSA de um sistema de partículas de massa total  $M$  se move como uma partícula equivalente de massa  $M$  se moveria sob a influência da força externa resultante no sistema.

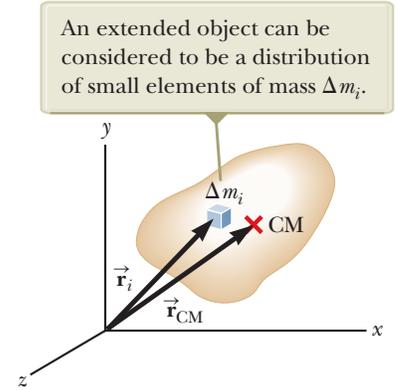


Figura 7.4: Serway & Jewett (2013).

### 7.5 Colisões em uma dimensão

Colisões acontecem quando duas partículas ficam muito próximas e interagem por meio de forças. As forças de interação são muito maiores que outras forças externas.

Uma colisão pode implicar no contato de dois corpos macroscópicos. Microscopicamente, no entanto, não existe ‘contato físico’. A figura ao lado mostra duas bolas colidindo, e uma colisão microscópica entre um elétron e uma partícula alfa (o núcleo de um átomo de hélio).

Não importa a complexidade das forças de interação: se o sistema pode ser considerado um sistema isolado (ou muito próximo disso), o momento linear é conservado em qualquer colisão. A energia cinética total, por outro lado, não necessariamente é conservada. Vamos ver os dois casos limites: o de colisões elásticas e o de colisões perfeitamente inelásticas.

#### 7.5.1 Colisões perfeitamente inelásticas

Colisões em que a energia cinética não é conservada são chamadas de inelásticas. Duas bolas de bilhar colidindo, por exemplo, emitem um som – parte da energia cinética foi usada para agitar as moléculas de ar.

Existe um tipo especial de colisão inelástica: quando os dois corpos aderem após a colisão, dizemos que a colisão é *perfeitamente inelástica*. A figura ao lado ilustra esse caso para dois objetos de massas  $m_1$  e  $m_2$ , com velocidades  $\vec{v}_{1i}$  e  $\vec{v}_{2i}$  antes da colisão. A energia do sistema não é conservada, mas o momento linear do sistema, sim. Pode escrever então

$$\Delta \vec{p} = 0, \tag{7.28}$$

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f, \tag{7.29}$$

$$m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i} = (m_1 + m_2) \vec{v}_f. \tag{7.30}$$

A velocidade final do sistema é, portanto,

$$\vec{v}_f = \frac{m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i}}{m_1 + m_2}. \tag{7.31}$$

#### 7.5.2 Colisões elásticas

Colisões em que a energia cinética é conservada são chamadas de *colisões elásticas*. A figura ao lado representa uma colisão que pode ter sido elástica entre duas partículas de massas  $m_1$  e  $m_2$ , com velocidades  $\vec{v}_{1i}$  e  $\vec{v}_{2i}$  antes da colisão.

Nesse tipo de colisão, tanto o momento linear quanto a energia cinética são conservados. Considerando que o eixo  $x$  é positivo para a direita,

$$p_i = p_f \Rightarrow m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}, \tag{7.32}$$

$$K_i = K_f \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2. \tag{7.33}$$

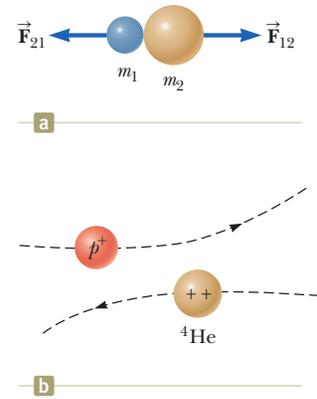


Figura 7.5: Serway & Jewett (2013).

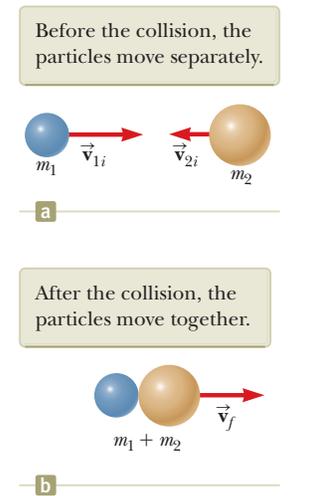


Figura 7.6: Serway & Jewett (2013).

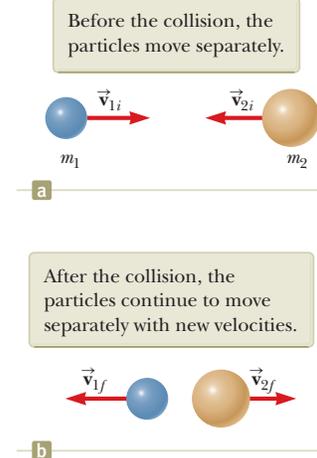


Figura 7.7: Serway & Jewett (2013).

As equações acima são um pouco difíceis de serem usadas por causa dos termos quadráticos. Vamos manipulá-las para obter um novo sistema de equações lineares em  $v$ . Da equação da conservação do momento, colocamos as massas em evidência:

$$m_1 (v_{1i} - v_{1f}) = m_2 (v_{2f} - v_{2i}). \quad (7.34)$$

Da equação da conservação da energia cinética, colocamos as massas em evidência e fatoramos os termos:

$$m_1 (v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2 (v_{2f}^2 - v_{2i}^2), \quad (7.35)$$

$$m_1 (v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) = m_2 (v_{2f} - v_{2i})(v_{2f} + v_{2i}). \quad (7.36)$$

Dividindo a equação (7.36) por (7.34),

$$v_{1i} + v_{1f} = v_{2f} + v_{2i}, \quad (7.37)$$

$$v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f}). \quad (7.38)$$

O nosso sistema de equações agora pode ser definido como as equações (7.34) e (7.38), que não envolvem o quadrado da velocidade. Vamos reescrevê-las aqui:

$$m_1 (v_{1i} - v_{1f}) = m_2 (v_{2f} - v_{2i}), \quad (7.39)$$

$$v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f}). \quad (7.40)$$

Em geral as duas incógnitas são as velocidades finais  $v_{1f}$  e  $v_{2i}$ . Isolando-as, obtemos:

$$v_{1f} = \left( \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} + \left( \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{2i}, \quad (7.41)$$

$$v_{2f} = \left( \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} + \left( \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{2i}. \quad (7.42)$$

## 7.6 Colisões em duas dimensões

Na seção anterior, analisamos colisões frontais, nas quais só precisamos nos preocupar com a conservação do momento em uma direção espacial. O caso mais geral é um sistema isolado, no qual  $p$  é conservado nas três dimensões.

Vamos estudar aqui o caso especial de colisão oblíquas em um plano, como entre duas bolas de bilhar. Pela conservação do momento linear em cada dimensão espacial, temos

$$m_1 v_{1ix} + m_2 v_{2ix} = m_1 v_{1fx} + m_2 v_{2fx}; \quad (7.43)$$

$$m_1 v_{1iy} + m_2 v_{2iy} = m_1 v_{1fy} + m_2 v_{2fy}. \quad (7.44)$$

Um caso especial é aquele em que uma das bolas está em repouso antes da colisão, como na figura ao lado. Esse caso é útil mesmo quando a segunda

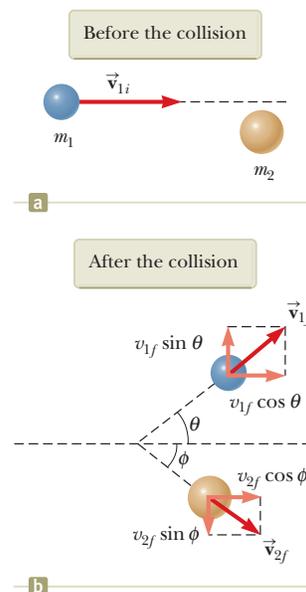


Figura 7.8: Serway & Jewett (2013).

bola não está em repouso: sempre podemos mudar para o referencial de uma bola, na qual ela está em repouso, usando as transformações de Galileu para a velocidade. Depois da colisão, a primeira bola sai em um ângulo  $\theta$  e a segunda em um ângulo  $\phi$  com a horizontal. O momento inicial do sistema na direção  $y$  é nulo. Podemos escrever então

$$\Delta p_x = 0 \rightarrow p_{ix} = p_{fx} \rightarrow m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos \theta + m_2 v_{2f} \cos \phi; \quad (7.45)$$

$$\Delta p_y = 0 \rightarrow p_{iy} = p_{jy} \rightarrow 0 = m_1 v_{1j} \sin \theta - m_2 v_{2j} \sin \phi. \quad (7.46)$$

Para o caso de uma colisão elástica, temos também

$$K_i = K_f \rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2. \quad (7.47)$$

Nosso sistema tem três equações. As quantidades físicas finais são quatro:  $v_{1j}, v_{2f}, \theta, \phi$ . Portanto, o problema não está determinado a partir dos princípios da conservação do momento e da energia. A indeterminação é ainda pior para o caso de colisões inelásticas, para as quais a equação anterior não é válida – para colisões perfeitamente inelásticas, no entanto, ele pode ser mais simples!



## *Agradecimentos*

Agradeço ao João Lucas Soares (Física Geral I-A, 2021-1, UFSC) pela leitura atenciosa e pelas correções. Quaisquer erros restantes são minha responsabilidade.