

FSC5122 - Exercício preparatório para experiências Lei de Hooke e a constante elástica da mola

Diz a lei de Hooke que uma mola deslocada (esticada ou comprimida) uma distância x de sua posição de equilíbrio te puxará de volta com uma força F dada por

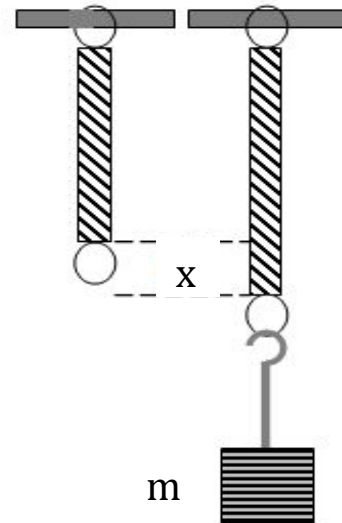
$$F = -k x$$

onde o sinal de menos está aí apenas para lembrar que F e x tem sinais opostos (i.e., quando a mola está para um lado ela te puxa de volta para o outro, e vice-versa). O coeficiente k nesta expressão é a chamada **constante elástica da mola**, que mede se a mola é mole (i.e., se com pouca F se obtém um grande x) ou se ela é dura (muita F pra pouco x).

Numa das experiências desse semestre você usará uma mola, uma trena e uma balança para verificar a lei de Hooke e determinar k . Este exercício prepara você para a experiência. No que segue considere que a aceleração da gravidade é $g = 979,15 \text{ cm/s}^2$, sem erro (i.e., trate-a como uma constante matemática, com infinitos algarismos significativos).

PARTE 1 – TRATAMENTO ESTATÍSTICO

Temos uma mola e queremos determinar sua k . Para isso vamos montá-la na vertical e pendurar nela uma massa m tal que o peso $m g$ contrabalance a força $k x$ da mola, de modo que $m g = k x$. A ideia é obter k a partir de medidas de m e x .



[Q1] Se você tem apenas uma medida de massa e deslocamento, sua estimativa de k será dada por $k = m g / x$. Calcule k para $m = (100,31 \pm 0,01) \text{ g}$ e $x = (79,56 \pm 0,05) \text{ cm}$. Ignore os erros de escala nessa conta, e anote o valor de k na tabela abaixo.

Obs: Como em outras tabelas a seguir, primeiro faça a conta sem se preocupar com algarismos significativos, e só depois passe seu resultado a limpo usando as regras de operações com algarismos significativos. Não se esqueça de anotar as unidades!

TABELA 1	Valor sem arredondamento	Valor arredondado
$k =$		

[Q2] Na conta acima ignoramos os erros em **m** e **x**. Obviamente, como $k = mg / x$ é uma função matemática de **m** e **x**, as incertezas $\Delta m = 0,01 \text{ g}$ e $\Delta x = 0,05 \text{ cm}$ inevitavelmente se propagam para uma incerteza Δk que podemos calcular através da fórmula de propagação de erros, onde cada uma dessas incertezas contribui com um termo. Com isso, preencha a tabela abaixo.

TABELA 2	Fórmula	Valor sem arredondamento
Δk devido a Δm		
Δk devido a Δx		
Δk total		

Se seu/sua chefe lhe desse \$\$ para melhorar a precisão de **k** nesse experimento, você investiria esse \$\$ em uma balança mais precisa ou em um instrumento que medisse **x** com um Δx menor? Justifique em termos de seus próprios cálculos na Tabela 2.

[Q3] Agora que você tem não só o valor de **k** (questão 1), mas também sua incerteza Δk (questão 2), passe seu resultado a limpo como manda o figurino, com valor, erro e unidade:

TABELA 3	$k = (\text{_____} +/- \text{_____}) \text{_____}$
----------	--

Este resultado condiz com o que você obteve na Tabela 1, antes de conhecer Δk ?

[Q4] Estimativas baseadas em uma única medição são sempre perigosas. Se possível, é recomendável realizar várias medidas para obter uma estimativa mais fiável e também para poder avaliar os efeitos de **erros aleatórios**. Com isso em mente realizamos **N = 5** medidas de **m** e de **x** com os mesmos instrumentos, obtendo os seguintes resultados:

m (g)	100,31 ± 0,01	100,29 ± 0,01	100,32 ± 0,01	100,30 ± 0,01	100,31 ± 0,01
x (cm)	79,45 ± 0,05	79,33 ± 0,05	79,48 ± 0,05	79,29 ± 0,05	79,50 ± 0,05

Estes dados nos permitem fazer uma análise estatística. Vamos calcular a média, desvio padrão, e desvio padrão da média tanto para **m** como para **x**. Anote seus resultados na tabela abaixo, com as devidas unidades.

Dica: Use as funções estatísticas de sua calculadora, pois elas são uma mão na roda - especialmente no dia da prova!

TABELA 4		Valor sem arredondamento	Valor arredondado
média de m	$\bar{m} =$		
desvio padrão de m	$\sigma(m) =$		
desvio padrão da média de m	$\sigma_{med}(m) =$		
média de x	\bar{x}		
desvio padrão de x	$\sigma(x) =$		
desvio padrão da média de x	$\sigma_{med}(x) =$		

[Q5] Na questão 1 calculamos $k = m g / x$ usando a única medida de **m** e **x** então disponível. Agora que temos várias medidas, recalcule **k** com a mesma fórmula, mas usando os valores médios de **m** e **x**. Para evitar o famigerado “erro de arredondamento precoce”, use valores não arredondados e escreva **k** como sair de sua calculadora, sem se preocupar (por enquanto) com algarismos significativos.

TABELA 5	$k =$
----------	-------

[Q6] Lembrando que o **erro total** em uma quantidade é a soma de seu erro de escala e seu erro aleatório provável (= desvio padrão da média), preencha a tabela abaixo. Para o erro em **k** use a fórmula para Δk que você mesmo obteve na questão 2 e usando os erros totais em **m** e **x**. (Naturalmente, **k** não tem uma erro de escala.)

Dica: Cuidado com a síndrome do arredondamento precoce...

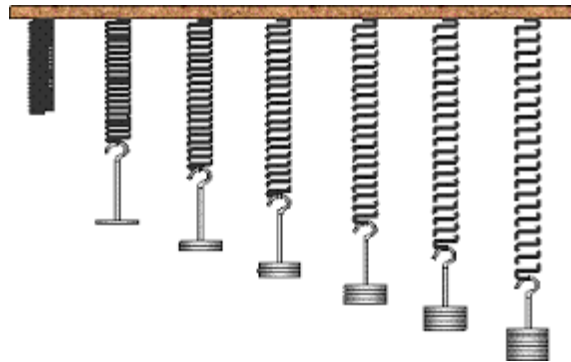
TABELA 6		Valor sem arredondamento	Valor arredondado
Erro total em m	$\Delta m =$		
Erro total em x	$\Delta x =$		
Erro total em k	$\Delta k =$		

[Q7] Para fechar esta parte da experiência, use todas suas contas nas Tabelas 4, 5 e 6 para escrever seus resultados finais para **m**, **x** e **k**, com valor, erro, e unidade, como deus manda:

TABELA 7	m = (_____ +/- _____) _____
	x = (_____ +/- _____) _____
	k = (_____ +/- _____) _____

PARTE 2 – TRATAMENTO GRÁFICO¹

Na parte 1 nossas medidas de **m** e **x** eram muito parecidas umas com as outras, o que motivou um tratamento estatístico dos dados. Agora vamos fazer algo diferente com nossa mola: Pendurar massas bem diferentes e medir os deslocamentos correspondentes para ver como **x** depende do peso. Este tipo de dado se presta mais a uma análise gráfica.



Suponha que suas medidas são:

m (g)	100,31 ± 0,01	200,29 ± 0,01	300,32 ± 0,01	400,30 ± 0,01	500,31 ± 0,01
x (cm)	78,40 ± 0,05	160,08 ± 0,05	234,45 ± 0,05	314,15 ± 0,05	398,98 ± 0,05
F (dyn)	98218,5365	196113,9535	294058,328	391953,745	489878,5365

Além de nossas medidas diretas de **m** e **x**, esta tabela inclui valores calculados do peso **F = m g** em unidades de dyn (“dina”), que é a unidade natural de força no sistema CGS (1 dyn = 1 g cm / s²). Note que, por pura preguiça, não propagamos o erro em **m** para **F**. Daqui para frente vamos esquecer das massas e trabalhar apenas com **F** e **x**.

[Q8] Linearização: Deixando de lado o sinal de menos, a lei de Hooke é normalmente apresentada com a força do lado esquerdo da equação, **F = k x**, o que nos diz como **F** depende de **x**. Mas se você pensar em como nossas medidas foram obtidas na experiência, é **x** que depende de **F**, e não o contrário! Em outras palavras, **x** é a variável dependente e **F** é a independente. Devemos, portanto, olhar para a lei de Hooke “de trás para frente”, isolando **x**:

¹ Uma versão virtual simplificada do experimento pode ser vista em www.4physics.com/phy_demo/HookesLaw/HookesLaw.html.

$$x = \frac{F}{k}$$

O processo de linearização consiste em comparar essa “equação mãe” com a equação para uma reta, $Y = A + B X$, e identificar quem é X , quem é Y , quem é A e quem é B em nosso problema. Faça isso na Tabela abaixo, e aproveite para especificar as unidades de cada uma dessas quantidades.

TABELA 8		unidade
Y =		
X =		
A =		
B =		

[Q9] Regressão linear: Como os valores de Y e X extraídos de nossa tabela de dados experimentais, obtenha os valores de A e B através do método dos mínimos quadrados. Anote o resultado na tabela abaixo, primeiro sem arredondar valores e reescrevendo os resultados com o número de algarismos significativos determinados segundo depois arredondando seguindo as regras aprendidas em aula. *Não se esqueça das unidades!*
Dica: Use a função de regressão linear em sua calculadora. Vale a pena!!

TABELA 9	Valor sem arredondamento	Valor arredondado
A =		
B =		

[Q10] Gráfico – pontos experimentais: Vamos agora graficar nossos resultados em papel milimetrado e **formato paisagem**. Escolha as escalas em X e Y e anote-as abaixo. Lembre-se de que apenas aceitamos escalas que tenham uma divisão de escala redonda (tipo 1, 2, 5, 10, 20, 50, etc) e que cubram uma boa fração do gráfico.

TABELA 10		unidade
Escala em X =		
Escala em Y =		

Uma vez definida a escala, identifique os eixos, marque os pontos experimentais e faça tudo que tem que ser feito em um gráfico decente!

[Q11] Gráfico – traçando a melhor reta: Para traçar a melhor reta você deve primeiro calcular dois pontos P_1 e P_2 e depois uni-los com uma régua. Para isso escolha valores redondos e bem separados para X_1 e X_2 , e use os coeficientes A e B obtidos acima (Tabela 9) para calcular os Y_1 e Y_2 correspondentes.

TABELA 11		
P_1	$X_1 =$	$Y_1 =$
P_2	$X_2 =$	$Y_2 =$

[Q12] A esta altura do campeonato você possivelmente já esqueceu que o principal objetivo aqui é determinar a constante elástica da mola... Para fazer isso volte à Tabela 8 e veja como k se relaciona com o coeficiente angular B . Use esta relação e o valor obtido para B pelo método dos mínimos quadrados (Tabela 9) para calcular o valor de k resultante dessa análise e anote o resultado na Tabela 12.

Dicas: (1) Não se esqueça das unidades, e (2) ao arredondar lembre-se das regras de operações com algarismos significativos.

TABELA 12	Valor sem arredondamento	Valor arredondado
$k =$		

[Q13] Para fechar, vamos comparar as determinações de k obtidas na partes 1 (tratamento estatístico, Tabela 7) e 2 (Tabela 12) da experiência. Note que ao fazer isso você estará comparando um valor (o k da parte 2) com um **intervalo de valores** (o $k \pm \Delta k$ da parte 1). Portanto, a pergunta relevante aqui é se o k da parte 2 está contido dentro da faixa de valores obtida na parte 1. Comente seu resultado.