FSC5122 - Exercício preparatório para experiências
Lei de Hooke e a constante elástica da mola

Diz a lei de Hooke que uma mola deslocada (esticada ou comprimida) uma distância **x** de sua posição de equilíbrio te puxará de volta com uma força **F** dada por

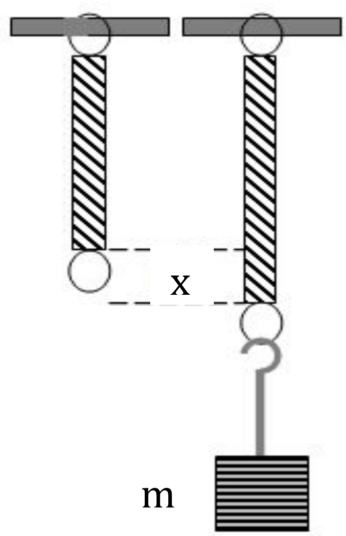
$$\mathbf{F = -k\,x}$$

onde o sinal de menos está aí apenas para lembrar que **F** e **x** tem sinais opostos (i.e., quando a mola está para um lado ela te puxa de volta para o outro, e vice-versa). O coeficiente **k** nesta expressão é a chamada **constante elástica da mola**, que mede se a mola é mole (i.e., se com pouca **F** se obtém um grande **x**) ou se ela é dura (muita **F** pra pouco **x**).

Numa das experiências desse semestre você usará uma mola, uma trena e uma balança para verificar a lei de Hooke e determinar **k**. Este exercício prepara você para a experiência. No que segue considere que a aceleração da gravidade é g = 979,15 cm/s^2, sem erro (i.e., trate-a como uma constante matemática, com infinitos algarismos significativos).

PARTE 1 – TRATAMENTO ESTATÍSTICO

Temos uma mola e queremos determinar sua **k**. Para isso vamos montá-la na vertical e pendurar nela uma massa **m** tal que o peso **m g** contrabalance a força **k x** da mola, de modo que **m g = k x**. A ideia é obter **k** a partir de medidas de **m** e **x**.



[Q1] Se você tem apenas uma medida de massa e deslocamento, sua estimativa de **k** será dada por **k = m g / x**. Calcule **k** para **m = (100,31 ± 0,01) g** e **x = (79,56 ± 0,05) cm**. Ignore os erros de escala nessa conta, e anote o valor de **k** na tabela abaixo.
Obs: Como em outras tabelas a seguir, primeiro faça a conta sem se preocupar com algarismos significativos, e só depois passe seu resultado a limpo usando as regras de operações com algarismos significativos. Não se esqueça de anotar as unidades!

TABELA 1	Valor sem arredondamento	Valor arredondado
k =	*1234.5216…*	*1235 dyn/cm*

[Q2] Na conta acima ignoramos os erros em **m** e **x**. Obviamente, como **k = mg / x** é uma função matemática de **m** e **x**, as incertezas **Δm = 0,01 g** e **Δx = 0,05 cm** inevitavelmente se propagam para uma incerteza **Δk** que podemos calcular através da fórmula de propagação de erros, onde cada uma dessas incertezas contribui com um termo. Com isso, preencha a tabela abaixo.

TABELA 2	Fórmula	Valor sem arredondamento
Δk devido a **Δm**	*$\Delta k = \lvert \partial k/\partial m \rvert \, \Delta m = (g/x)\, \Delta m$*	*0.12307063851181499 dyn/cm*
Δk devido a **Δx**	*$\Delta k = \lvert \partial k/\partial x \rvert \, \Delta x = (mg/x^2)\, \Delta x$*	*0.7758431214881951 dyn/cm*
Δk total	*$\Delta k = (g/x)\, \Delta m + (mg/x^2)\, \Delta x$*	*0.8989137600000101 dyn/cm*

Se seu/sua chefe lhe desse $$ para melhorar a precisão de **k** nesse experimento, você investiria esse $$ em uma balança mais precisa ou em um instrumento que medisse **x** com um **Δx** menor? Justifique em termos de seus próprios cálculos na Tabela 2.

Uma trena melhor teria mais efeito, uma vez que (segundo a Tabela 2) Δk devido a Δx é o termo dominante.

[Q3] Agora que você tem não só o valor de **k** (questão 1), mas também sua incerteza **Δk** (questão 2), passe seu resultado a limpo como manda o figurino, com valor, erro e unidade:

TABELA 3	**k** = *(1234,5 ± 0,9) dyn/cm*

Este resultado condiz com o que você obteve na Tabela 1, antes de conhecer **Δk**?

Quase…..mas não exatamente. Agora temos um dígito a mais de precisão.

[Q4] Estimativas baseadas em uma única medição são sempre perigosas. Se possível, é recomendável realizar várias medidas para obter uma estimativa mais fiável e também para poder avaliar os efeitos de **erros aleatórios**. Com isso em mente realizamos **N = 5** medidas de **m** e de **x** com os mesmos instrumentos, obtendo os seguintes resultados:

m (g)	100,31 ± 0,01	100,29 ± 0,01	100,32 ± 0,01	100,30 ± 0,01	100,31 ± 0,01
x (cm)	79,45 ± 0,05	79,33 ± 0,05	79,48 ± 0,05	79,29 ± 0,05	79,50 ± 0,05

Estes dados nos permitem fazer uma análise estatística. Vamos calcular a média, desvio padrão, e desvio padrão da média tanto para **m** como para **x**. Anote seus resultados na tabela abaixo, com as devidas unidades.
Dica: Use as funções estatísticas de sua calculadora, pois elas são uma mão na roda - especialmente no dia da prova!

TABELA 4		Valor sem arredondamento	Valor arredondado
média de **m**	$\bar{m}$ =	*100.30600000000001*	*100.31 g*
desvio padrão de **m**	$\sigma(m)$ =	*0.011401754250987866*	*0.01 g*
desvio padrão da média de **m**	$\sigma_{med}(m)$ =	*0.0050990195135912127*	*0.005 g*
média de **x**	$\bar{x}$	*79.409999999999997*	*79.41 cm*
desvio padrão de **x**	$\sigma(x)$ =	*0.094074438611133307*	*0.09 cm*
desvio padrão da média de **x**	$\sigma_{med}(x)$ =	*0.042071367935924996*	*0.04 cm*

[Q5] Na questão 1 calculamos **k = m g / x** usando a única medida de **m** e **x** então disponível. Agora que temos várias medidas, recalcule **k** com a mesma fórmula, mas usando os valores médios de **m** e **x**. Para evitar o famigerado “erro de arredondamento precoce”, use valores não arredondados e escreva **k** como sair de sua calculadora, sem se preocupar (por enquanto) com algarismos significativos.

TABELA 5	**k** = *1236.8041795743611 dyn/cm*

[Q6] Lembrando que o **erro total** em uma quantidade é a soma de seu erro de escala e seu erro aleatório provável (= desvio padrão da média), preencha a tabela abaixo. Para o erro em **k** use a fórmula para Δ**k** que você mesmo obteve na questão 2 e usando os erros totais em **m** e **x**. (Naturalmente, **k** não tem uma erro de escala.)
Dica: Cuidado com a síndrome do arredondamento precoce...

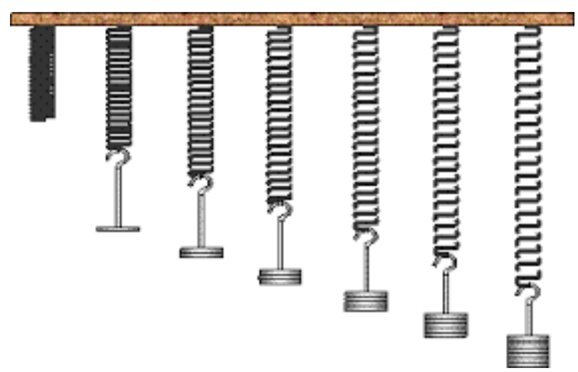
TABELA 6		Valor sem arredondamento	Valor arredondado
Erro total em **m**	Δm =	*0.015099019513591213*	*0.02 g*
Erro total em **x**	Δx =	*0.092071367935924991*	*0.09 cm*
Erro total em **k**	Δk =	*1.6201795446293121*	*2 dyn/cm*

[Q7] Para fechar esta parte da experiência, use todas suas contas nas Tabelas 4, 5 e 6 para escrever seus resultados finais para **m**, **x** e **k**, com valor, erro, e unidade, como deus manda:

TABELA 7	**m** = (100,31 ± 0,02) g **x** = (79,41 ± 0,09) cm **k** = (1237 ± 2) dyn/cm

PARTE 2 – TRATAMENTO GRÁFICO[1]

Na parte 1 nossas medidas de **m** e **x** eram muito parecidas umas com as outras, o que motivou um tratamento estatístico dos dados. Agora vamos fazer algo diferente com nossa mola: Pendurar massas bem diferentes e medir os deslocamentos correspondentes para ver como **x** depende do peso. Este tipo de dado se presta mais a uma análise gráfica.



Suponha que suas medidas são:

m (g)	100,31 ± 0,01	200,29 ± 0,01	300,32 ± 0,01	400,30 ± 0,01	500,31 ± 0,01
x (cm)	78,40 ± 0,05	160,08 ± 0,05	234,45 ± 0,05	314,15 ± 0,05	398,98 ± 0,05
F (dyn)	**98218**,5365	**196113**,9535	**294058**,328	**391953**,745	**489878**,5365

Além de nossas medidas diretas de **m** e **x**, esta tabela inclui valores calculados do peso **F = m g** (onde **g** = 979,15 cm/s^2) em unidades de dyn ("dina"), que é a unidade natural de força no sistema CGS (1 dyn = 1 g cm / s^2). Note que, por pura preguiça, não propagamos o erro em **m** para **F**. Daqui para frente vamos esquecer das massas e trabalhar apenas com **F** e **x**.

[Q8] **Linearização:** Deixando de lado o sinal de menos, a lei de Hooke é normalmente apresentada com a força do lado esquerdo da equação, **F = k x**, o que nos diz como **F** depende de **x**. Mas se você pensar em como nossas medidas foram obtidas na experiência, é **x** que depende de **F**, e não o contrário! Em outras palavras, **x** é a variável dependente e **F** é a independente. Devemos, portanto, olhar para a lei de Hooke "de trás para frente", isolando **x**:

[1] Uma versão virtual simplificada do experimento pode ser vista em www.4physics.com/phy_demo/HookesLaw/HookesLaw.html.

$$x = \frac{F}{k}$$

O processo de linearização consiste em comparar essa “equação mãe” com a equação para uma reta, **Y = A + B X**, e identificar quem é **X**, quem é **Y**, quem é **A** e quem é **B** em nosso problema. Faça isso na Tabela abaixo, e aproveite para especificar as unidades de cada uma dessas quantidades.

TABELA 8		unidade
Y =	*x*	*cm*
X =	*F*	*dyn*
A =	*0*	*cm*
B =	*1 / k*	*cm / dyn*

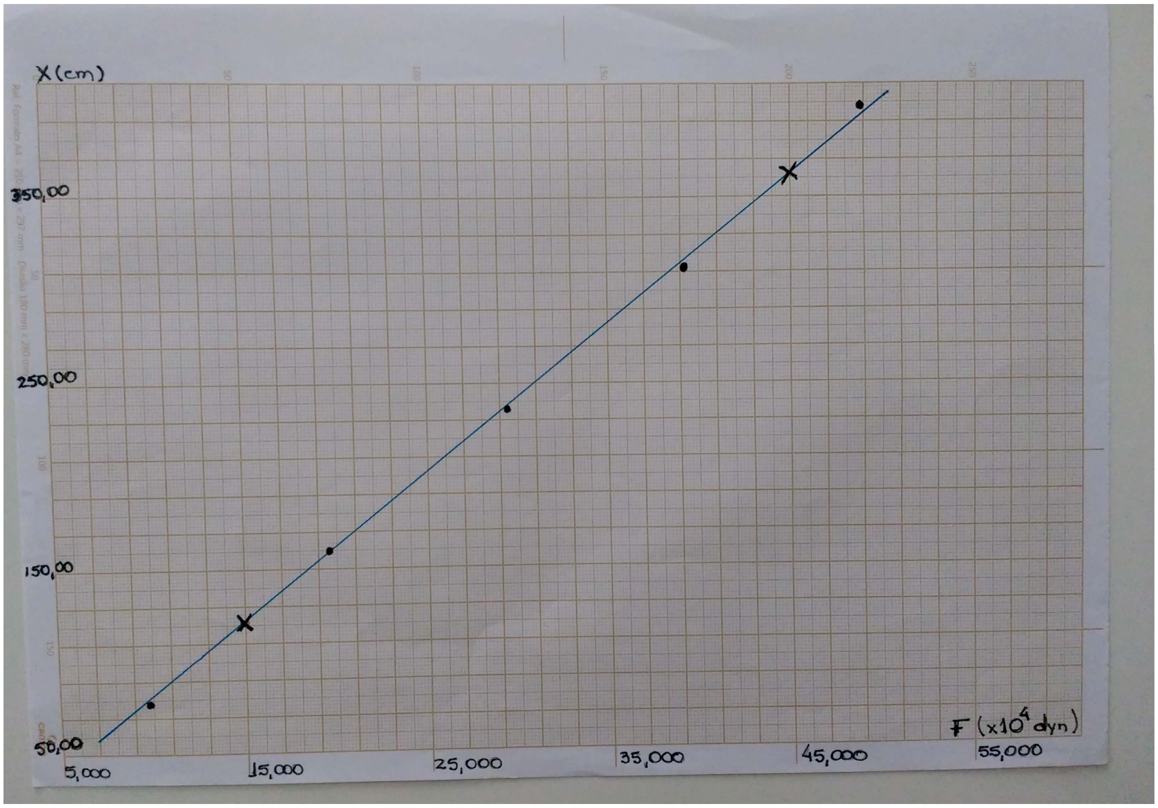
[Q9] **Regressão linear:** Como os valores de **Y** e **X** extraídos de nossa tabela de dados experimentais, obtenha os valores de **A** e **B** através do método dos mínimos quadrados. Anote o resultado na tabela abaixo, primeiro sem arredondar valores e reescrevendo os resultados com o número de algarismos significativos determinados segundo depois arredondando seguindo as regras aprendidas em aula. *Não se esqueça das unidades! Dica: Use a função de regressão linear em sua calculadora. Vale a pena!!*

TABELA 9	Valor sem arredondamento	Valor arredondado
A =	*-1,597354301*	*-1,60 cm*
B =	*0,0008121537608*	*0,00081215 cm/dyn*

[Q10] **Gráfico – pontos experimentais:** Vamos agora graficar nossos resultados em papel milimetrado e **formato paisagem**. Escolha as escalas em **X** e **Y** e anote-as abaixo. Lembre-se de que apenas aceitamos escalas que tenham uma divisão de escala redonda (tipo 1, 2, 5, 10, 20, 50, etc) e que cubram uma boa fração do gráfico.

TABELA 10		unidade
Escala em **X** =	*(489879 - 98219) / 28 = 13987.85742 → **20000***	*dyn / cm-de-papel*
Escala em **Y** =	*(398.98 - 78.40) / 18 = 17.91 → **20***	*cm / cm-de-papel*

Uma vez definida a escala, identifique os eixos, marque os pontos experimentais e faça tudo que tem que ser feito em um gráfico decente!



[Q11] **Gráfico – traçando a melhor reta:** Para traçar a melhor resta você deve primeiro calcular dois pontos **P_1** e **P_2** e depois uni-los com uma régua. Para isso escolha valores redondos e bem separados para X_1 e X_2, e use os coeficientes A e B obtidos acima (Tabela 9) para calcular os Y_1 e Y_2 correspondentes.

TABELA 11		
P_1	**X_1** = *150000 dyn*	**Y_1** = *120,31 cm*
P_2	**X_2** = *450000 dyn*	**Y_2** = *363,41 cm*

[Q12] A esta altura do campeonato você possivelmente já esqueceu que o principal objetivo aqui é determinar a constante elástica da mola... Para fazer isso volte à Tabela 8 e veja como **k** se relaciona com o coeficiente angular **B**. Use esta relação e o valor obtido para **B** pelo método dos mínimos quadrados (Tabela 9) para calcular o valor de **k** resultante dessa análise e anote o resultado na Tabela 12.
Dicas: (1) Não se esqueça das unidades, e (2) ao arredondar lembre-se das regras de operações com algarismos significativos.

TABELA 12	Valor sem arredondamento	Valor arredondado
k =	*1231,29393504866*	*1231,3 dyn/cm*

Olhando para a tabela de dados vemos que os x's têm 4 ou 5 algarismos significativos, enquanto todas F têm 5 significativos. É por isso que (na Tabela 9) arredondamos B de modo a conter 5 algarismos significativos. Pelo mesmo motivo, k também deve ser escrita com 5 algarismos significativos.

[Q13] Para fechar, vamos comparar as determinações de **k** obtidas na partes 1 (tratamento estatístico, Tabela 7) e 2 (Tabela 12) da experiência. Note que ao fazer isso você estará comparando um valor (o **k** da parte 2) com um **intervalo de valores** (o **k ± Δk** da parte 1). Portanto, a pergunta relevante aqui é se o **k** da parte 2 está contido dentro da faixa de valores obtida na parte 1. Comente seu resultado.

Os resultados não são consistentes, pois k_1 = (1237 ± 2) dyn/cm enquanto k_2 = 1231,3 dyn/cm. Se a incerteza estimada na parte 1 está correta então algo deve ter falhado nas medidas da parte 2, pois elas levam a um resultado fora da margem de erro esperada, que vai de k = 1235 a 1239 dyn/cm. Mesmo assim, os dois valores são muito próximos, com uma diferença percentual de apenas 0,46%.