

FSC5122 - Exercício preparatório para experiências

Lei de Hooke e a constante elástica da mola

Diz a lei de Hooke que uma mola deslocada (esticada ou comprimida) uma distância x de sua posição de equilíbrio te puxará de volta com uma força F dada por

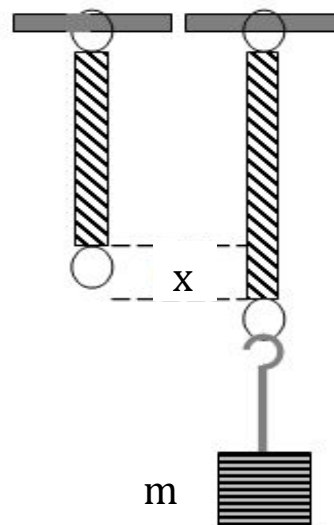
$$F = -k x$$

onde o sinal de menos está aí apenas para lembrar que F e x tem sinais opostos (i.e., quando a mola está para um lado ela te puxa de volta para o outro, e vice-versa). O coeficiente k nesta expressão é a chamada **constante elástica da mola**, que mede se a mola é mole (i.e., se com pouca F se obtém um grande x) ou se ela é dura (muita F pra pouco x).

Numa das experiências desse semestre você usará uma mola, uma trena e uma balança para verificar a lei de Hooke e determinar k . Este exercício prepara você para a experiência. No que segue considere que a aceleração da gravidade é $g = 979,15 \text{ cm/s}^2$, sem erro (i.e., trate-a como uma constante matemática, com infinitos algarismos significativos).

PARTE 1 – TRATAMENTO ESTATÍSTICO

Temos uma mola e queremos determinar sua k . Para isso vamos montá-la na vertical e pendurar nela uma massa m tal que o peso $m g$ contrabalance a força $k x$ da mola, de modo que $m g = k x$. A ideia é obter k a partir de medidas de m e x .



[Q1] Se você tem apenas uma medida de massa e deslocamento, sua estimativa de k será dada por $k = m g / x$. Calcule k para $m = (100,31 \pm 0,01) \text{ g}$ e $x = (79,56 \pm 0,05) \text{ cm}$. Ignore os erros de escala nessa conta, e anote o valor de k na tabela abaixo.

Obs: Como em outras tabelas a seguir, primeiro faça a conta sem se preocupar com algarismos significativos, e só depois passe seu resultado a limpo usando as regras de operações com algarismos significativos. Não se esqueça de anotar as unidades!

TABELA 1	Valor sem arredondamento	Valor arredondado
$k =$	1234.5216...	1235 dyn/cm

[Q2] Na conta acima ignoramos os erros em **m** e **x**. Obviamente, como $k = mg / x$ é uma função matemática de **m** e **x**, as incertezas $\Delta m = 0,01$ g e $\Delta x = 0,05$ cm inevitavelmente se propagam para uma incerteza Δk que podemos calcular através da fórmula de propagação de erros, onde cada uma dessas incertezas contribui com um termo. Com isso, preencha a tabela abaixo.

TABELA 2	Fórmula	Valor sem arredondamento
Δk devido a Δm	$\Delta k = \partial k / \partial m \Delta m = (g/x) \Delta m$	0.12307063851181499 dyn/cm
Δk devido a Δx	$\Delta k = \partial k / \partial x \Delta x = (mg/x^2) \Delta x$	0.7758431214881951 dyn/cm
Δk total	$\Delta k = (g/x) \Delta m + (mg/x^2) \Delta x$	0.8989137600000101 dyn/cm

Se seu/sua chefe lhe desse \$\$ para melhorar a precisão de **k** nesse experimento, você investiria esse \$\$ em uma balança mais precisa ou em um instrumento que medisse **x** com um Δx menor? Justifique em termos de seus próprios cálculos na Tabela 2.

Uma trena melhor teria mais efeito, uma vez que (segundo a Tabela 2) Δk devido a Δx é o termo dominante.

[Q3] Agora que você tem não só o valor de **k** (questão 1), mas também sua incerteza Δk (questão 2), passe seu resultado a limpo como manda o figurino, com valor, erro e unidade:

TABELA 3	$k = (1234,5 \pm 0,9) \text{ dyn/cm}$
----------	---------------------------------------

Este resultado condiz com o que você obteve na Tabela 1, antes de conhecer Δk ?

Quase.....mas não exatamente. Agora temos um dígito a mais de precisão.

[Q4] Estimativas baseadas em uma única medição são sempre perigosas. Se possível, é recomendável realizar várias medidas para obter uma estimativa mais fiável e também para poder avaliar os efeitos de **erros aleatórios**. Com isso em mente realizamos **N = 5** medidas de **m** e de **x** com os mesmos instrumentos, obtendo os seguintes resultados:

m (g)	100,31 ± 0,01	100,29 ± 0,01	100,32 ± 0,01	100,30 ± 0,01	100,31 ± 0,01
x (cm)	79,45 ± 0,05	79,33 ± 0,05	79,48 ± 0,05	79,29 ± 0,05	79,50 ± 0,05

Estes dados nos permitem fazer uma análise estatística. Vamos calcular a média, desvio padrão, e desvio padrão da média tanto para **m** como para **x**. Anote seus resultados na tabela abaixo, com as devidas unidades.

Dica: Use as funções estatísticas de sua calculadora, pois elas são uma mão na roda - especialmente no dia da prova!

TABELA 4		Valor sem arredondamento	Valor arredondado
média de m	$\bar{m} =$	100.30600000000001	100.31 g
desvio padrão de m	$\sigma(m) =$	0.011401754250987866	0.01 g
desvio padrão da média de m	$\sigma_{med}(m) =$	0.0050990195135912127	0.005 g
média de x	\bar{x}	79.409999999999997	79.41 cm
desvio padrão de x	$\sigma(x) =$	0.094074438611133307	0.09 cm
desvio padrão da média de x	$\sigma_{med}(x) =$	0.042071367935924996	0.04 cm

[Q5] Na questão 1 calculamos $k = m \cdot g / x$ usando a única medida de **m** e **x** então disponível. Agora que temos várias medidas, recalcule **k** com a mesma fórmula, mas usando os valores médios de **m** e **x**. Para evitar o famigerado “erro de arredondamento precoce”, use valores não arredondados e escreva **k** como sair de sua calculadora, sem se preocupar (por enquanto) com algarismos significativos.

TABELA 5	$k =$ 1236.8041795743611 dyn/cm
----------	---------------------------------

[Q6] Lembrando que o **erro total** em uma quantidade é a soma de seu erro de escala e seu erro aleatório provável (= desvio padrão da média), preencha a tabela abaixo. Para o erro em **k** use a fórmula para Δk que você mesmo obteve na questão 2 e usando os erros totais em **m** e **x**. (Naturalmente, **k** não tem uma erro de escala.)

Dica: Cuidado com a síndrome do arredondamento precoce...

TABELA 6		Valor sem arredondamento	Valor arredondado
Erro total em m	$\Delta m =$	0.015099019513591213	0.02 g
Erro total em x	$\Delta x =$	0.092071367935924991	0.09 cm
Erro total em k	$\Delta k =$	1.6201795446293121	2 dyn/cm

[Q7] Para fechar esta parte da experiência, use todas suas contas nas Tabelas 4, 5 e 6 para escrever seus resultados finais para **m**, **x** e **k**, com valor, erro, e unidade, como deus manda:

TABELA 7	$\mathbf{m} = (100,31 \pm 0,02) \text{ g}$ $\mathbf{x} = (79,41 \pm 0,09) \text{ cm}$ $\mathbf{k} = (1237 \pm 2) \text{ dyn/cm}$
-----------------	--