

Estudos Sobre a Difração de Fraunhofer em  
Aberturas Retangular e Circular

Betânia Camille Tumelero Backes

Dezembro de 2016

# Sumário

0.1	Introdução . . . . .	1
0.2	Teoria Básica . . . . .	1
0.2.1	Difração por uma abertura retangular . . . . .	3
0.2.2	Difração por uma abertura circular . . . . .	4
0.2.3	Princípio de Babinet . . . . .	5
0.3	Trabalhos feitos . . . . .	5
0.4	Conclusão . . . . .	8

## 0.1 Introdução

Neste trabalho será abordada a Difração de Fraunhofer para diferentes aberturas, citando o princípio de Babinet e suas implicações. Após uma breve abordagem teórica, serão apresentadas as abordagens computacionais feitas sobre estes temas.

## 0.2 Teoria Básica

Ao observarmos um feixe de luz que passa por um orifício e chega em um anteparo, perceberemos que não observamos uma forma idêntica à do orifício, como seria caso a luz se propagasse de maneira retilínea, e sim observamos desvios, com regiões escuras e claras. A esse fenômeno, chamamos de difração. Quanto maior for o comprimento de onda do feixe de luz comparado às dimensões do orifício, mais claramente notaremos os efeitos da difração.

No geral, dividimos os efeitos da difração de acordo com a proximidade entre o obstáculo e o anteparo. Quando o anteparo está próximo do obstáculo nomeamos Difração de Fresnel, enquanto quando este se encontra longe nomeamos Difração de Fraunhofer. Aqui, estaremos interessados apenas neste segundo caso.

Para nos contermos a essa região, deve ser satisfeita a seguinte condição:

$$R \gg \frac{D^2}{\lambda} \tag{1}$$

Onde  $R$  é a distância entre o anteparo e o obstáculo,  $D$  é o diâmetro do anteparo e  $\lambda$  é o comprimento de onda. Como  $R \gg D$ :

$$\frac{D}{\lambda} \gg 1 \quad (2)$$

De acordo com o princípio de Huygens-Fresnel e utilizando os resultados da Teoria de Kirchhoff da difração, estudos que não mostraremos em detalhes, mas que podem ser encontrados em maiores demonstrações em [2], temos que:

$$v(\mathbf{P}) = \frac{1}{i\lambda} \int_A \cos\theta' v_0(\mathbf{P}') \frac{e^{ikr}}{r} d\sigma \quad (3)$$

Podemos ver na Figura 1 uma representação gráfica das das variáveis descritas em (3). Faremos então algumas aproximações para que possamos chegar em expressões mais simplificadas para abordar o problema.

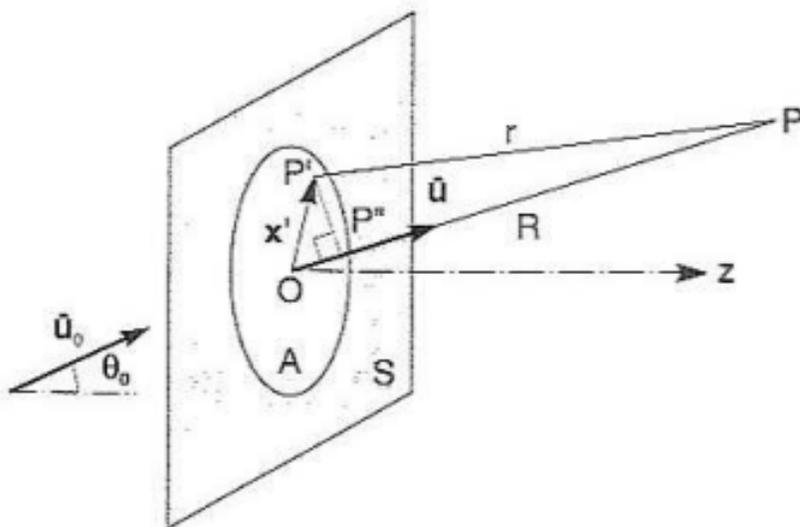


Figura 1: Difração de Fraunhofer para um orifício circular de área A, onde  $\hat{u}_0$  é o versor na direção de propagação,  $P'$  é um ponto de A. Figura retirada de [2].

Sendo  $a_0$  a amplitude da onda incidente, podemos escrever:

$$v_0(\mathbf{P}') = a_0 e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x}'} \quad (4)$$

Onde  $\mathbf{k}_0 \equiv k\hat{u}$ . Como podemos aproximar  $r$  por  $\overline{OP}$  subtraindo a projeção de  $\overline{OP'}$  sobre  $\overline{OP}$ , temos que  $r \approx R - \hat{u} \cdot \mathbf{x}'$ . Desta forma, podemos substituir  $r$  por  $R$  no denominador de (3), mas não na exponencial, onde  $kr$  varia bastante. Além disso,  $\cos\theta'$  varia pouco na abertura, de modo que podemos substituí-lo por um  $\cos\theta_0$  fixo. Sabendo disso, de (4) em (3) temos:

$$v(\mathbf{P}) = \frac{a_0}{i\lambda} \cos\theta_0 \frac{e^{ikR}}{R} \int_A e^{i(\mathbf{k}_0 - k)\cdot \mathbf{x}'} d^2x \quad (5)$$

Como  $\mathbf{k} \equiv k\hat{u}_0$ , temos que a amplitude da onda resultante depende da direção de incidência ( $\hat{u}_0$ ) e da direção de observação  $\hat{u}$ , estando presente esta diferença de fase na exponencial de (5). Podemos escrever a amplitude como:

$$v(P) = a_0 f(k, \hat{u}_0, \hat{u}) \frac{e^{ikR}}{R} \quad (6)$$

$$f(k, \hat{u}_0, \hat{u}) = \frac{\cos\theta_0}{i\lambda} \int_A e^{ik(\hat{u}_0 - \hat{u}) \cdot \mathbf{x}'} d^2x \quad (7)$$

Disto, temos que a intensidade máxima pode ser escrita como:

$$f(k, \hat{u}_0, \hat{u}_0) = \frac{\cos\theta_0}{i\lambda} \sigma_A \quad (8)$$

Usualmente, estamos interessados em observar a amplitude relativa, comparando-a com a máxima. Além disso, consideramos que a razão entre as intensidades é módulo quadrado das razões entre as amplitudes. Ao considerarmos apenas incidência perpendicular ao anteparo, caso em que  $\hat{u}_0 \cdot \mathbf{x}' = 0$ , podemos escrever:

$$\frac{I(\hat{u})}{I(\hat{u}_0)} = \frac{1}{(\sigma_A)^2} \left| \int_A e^{ik\hat{u} \cdot \mathbf{x}'} d^2x \right|^2 \quad (9)$$

### 0.2.1 Difração por uma abertura retangular

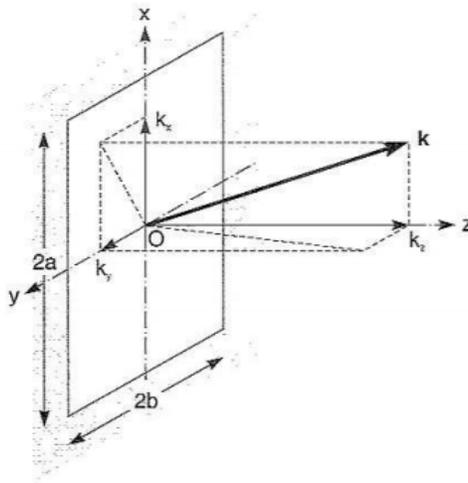


Figura 2: Difração de Fraunhofer para uma abertura retangular de lados  $2a$  e  $2b$ .  $k = k\hat{u}$ ;  $\hat{u} \equiv (\alpha, \beta, \gamma)$ . Figura retirada de [2].

Temos que  $\mathbf{x}' = (x', y', 0)$ . A integral contida em (9) pode então ser expressa por:

$$\int_{-a}^a dx' \int_{-b}^b e^{-ik(\alpha x' + \beta y')} dy' = \int_{-a}^a e^{-ik\alpha x'} dx' \int_{-b}^b e^{-ik\beta y'} dy' \quad (10)$$

$$= \frac{e^{ik\alpha a} - e^{-ik\alpha a}}{ik\alpha} \frac{e^{ik\beta b} - e^{-ik\beta b}}{ik\beta} \quad (11)$$

E então, pela fórmula de Euler temos facilmente que a integral equivale a:

$$\int_A e^{-ik\hat{u}\cdot x'} d^2x' = \frac{4}{k^2\alpha\beta} \text{sen}(k\alpha a) \text{sen}(k\beta b) \quad (12)$$

Como  $\sigma_A = (2a)(2b) = 4ab$ , aplicando esses resultados em (9), conseguimos:

$$\frac{I(\hat{u})}{I(\hat{u}_0)} = \frac{\text{sen}^2(k\alpha a)}{(k\alpha a)} \cdot \frac{\text{sen}^2(k\beta b)}{(k\beta b)} \quad (13)$$

### 0.2.2 Difração por uma abertura circular

Ao analisarmos a difração que ocorre por uma abertura circular de raio  $a$ , a primeira coisa que pode ser notada é a simetria em torno e  $Oz$ . Utilizando coordenadas polares, podemos escrever:

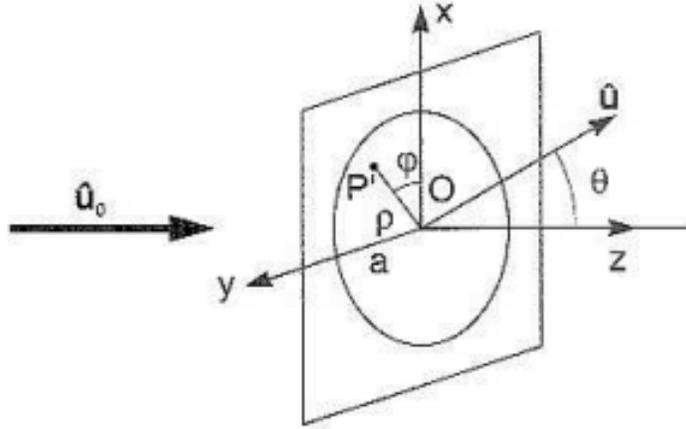


Figura 3: Difração de Fraunhofer para uma abertura circular. Figura retirada de [2].

$$\int_A e^{-ik\hat{u}\cdot x'} d^2x' = \int_0^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-ik\rho \text{sen}\theta \cos\varphi} \quad (14)$$

Não podemos reduzir (14) a funções elementares, como no caso anterior. A integral é dada em função de  $J_1(u)$ , a função de Bessel de ordem um. Como

expresso em [2], as propriedades qualitativas desta são bastante semelhantes às da função  $\text{sen}^2 u/u^2$ . Podemos escrever:

$$\frac{I(\theta)}{I(0)} = 4 \left( \frac{J_1(k a \text{sen} \theta)}{k a \text{sen} \theta} \right)^2 \quad (15)$$

### 0.2.3 Princípio de Babinet

O princípio de Babinet nos diz que a soma das ondas difratadas em um ponto por dois dispositivos complementares é igual à onda incidente no mesmo ponto e propagada livremente. A partir disso, podemos concluir que as figuras de difração de Fraunhofer associadas a dispositivos complementares são iguais, exceto na direção de propagação. Isso pode se tornar mais claro ao observarmos a Figura 4

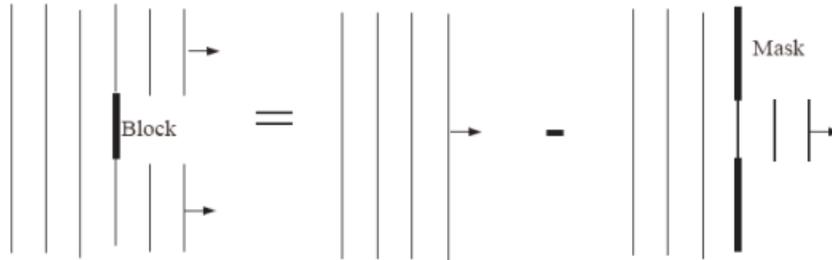


Figura 4: Figura retirada de [3].

Podemos então observar que a onda difratada por um obstáculo será a mesma que a difratada sem o obstáculo (aproximadamente nula) subtraindo a onda difratada por um orifício complementar ao obstáculo.

Desta forma, a figura de difração formada por um disco de raio  $a$  será a mesma que se fosse formada por uma abertura circular.

## 0.3 Trabalhos feitos

Utilizando o *ROOT*<sup>1</sup>, através de gráficos e alguns estudos, se tornou possível visualizar melhor os efeitos da difração citados na teoria.

Primeiramente, ao observarmos (13), podemos perceber que esta é composta por um produto de dois fatores muito parecidos com  $\text{sen}^2 u/u^2$ . Para gerar um gráfico para esta expressão utilizando o *ROOT*, é bem simples. Com o programa aberto, basta inserir o seguinte:

```
ROOT [0] TF1 eq13("eq13","sin(x)/x*sin(x)/x");
ROOT [1] eq13.SetTitle("sin^{2}x/x^{2}");
ROOT [2] eq13.Draw();
```

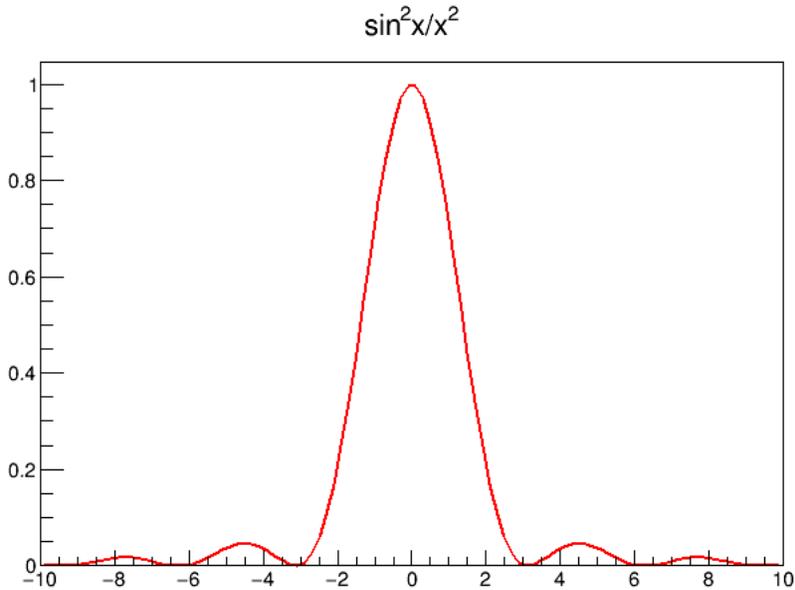


Figura 5: Gráfico feito pela autora. Pode ser observado que se trata de uma função par que se anula nos pontos  $x = n\pi$ , ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )

$(1 + 1/2)\pi$	0.047
$(2 + 1/2)\pi$	0.017
$(3 + 1/2)\pi$	0.008

Tabela 1: Valor dos máximos da função graficada na Figura 5. O valor do máximo central é 1.

Com o gráfico gerado, representado na Figura 5, bem como observando a equação (13), podemos reparar que os máximos se encontram em  $(n + 1/2)\pi$ . Podemos calcular qual será a intensidade nos mini-máximos. Calculando a função nos valores dos máximos, temos que os valores dos mini-máximos serão os representados na Tabela 1.

Com isso, como quando temos  $x = 0$ , a função  $\text{sen}^2x/x^2$  vale 1, ocorrendo similarmente com  $\text{sen}^2y/y^2$  quando  $y = 0$ . Assim, temos uma cruz formada no anteparo, onde as intensidades dos máximos é dada pela Tabela 1. Para obter os máximos nas diagonais, basta efetuar uma multiplicação entre os máximos da cruz principal. Assim, obtém-se um resultado análogo ao dado em [2], como pode ser visto na Figura 6.

Como (13) se anula em  $ka\alpha_n = n\pi$ , temos uma separação angular entre os

<sup>1</sup>Software livre. Download e manual disponíveis em: <https://root.cern.ch/>

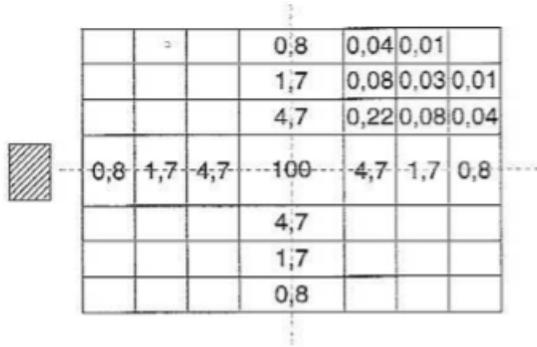


Figura 6: Figura retirada de [2], que coincide com os dados da Tabela 1. O retângulo à esquerda representa a abertura retangular.

mínimos que pode se expressa por  $\alpha_n = n\pi/(ka) = n\lambda/(2a)$ ,  $\Delta\alpha \approx \lambda/(2a)$  e similarmemente  $\Delta\beta \approx \lambda/(2b)$ . Destas relações, podemos perceber facilmente que quanto maiores forem os lados do retângulo, menor será a separação angular entre os mínimos (ou máximos), e mais estreita será a figura de difração. Similarmemente, temos que quanto menores as dimensões do retângulo, maior será a abertura angular da figura de difração.

A fim de observar melhor esse efeito, foi feito um código em *C++* para ser compilado no *ROOT*. Esse código encontrará-se em anexo, sendo expressos aqui os resultados obtidos ao executarmos. Na parte inicial do código, há a possibilidade de que se altere os valores ds dimensões do retângulo da abertura, de modo que pudemos comparar os gráficos para diferentes valores.

É possível observar as diferenças entre as separações angulares dos máximos nas diferentes figuras(Figuras 7, 8, 9, 10), cujos valores de  $a$  e  $b$  encontram-se nas legendas. O caso em que isso se torna mais visível é na Figura 10, caso em que  $a = 0.5mm, b = 0.2mm$ . É possível, ao executar o código, rotacionar o gráfico, deixando ainda mais visível a diferença entre os dois lados.

Devido à falta de similaridade com a função de Bessel de ordem um, a análise para a difração por uma abertura circular de raio  $a$  não é tão completa quanto a por uma abertura retangular. Como pode ser encontrado em [1], podemos definir  $J_1$  como:

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(n+1)!2^{2n+1}} \quad (16)$$

Realizando computacionalmente o cálculo para  $J_1$ , obtemos o resultado necessário para graficar (15). Esse procedimento pode ser encontrado em um código em anexo com o nome de *bessel.C*. Foi feito então um gráfico utilizando o *ROOT*, gerando o arquivo de dados *bessel.dat* e a Figura 11.

Analizando o arquivo de dados, é possível perceber que o primeiro mínimo da equação (15) é obtido quando temos  $u = 3.83$ . Esse valor é aproximadamente

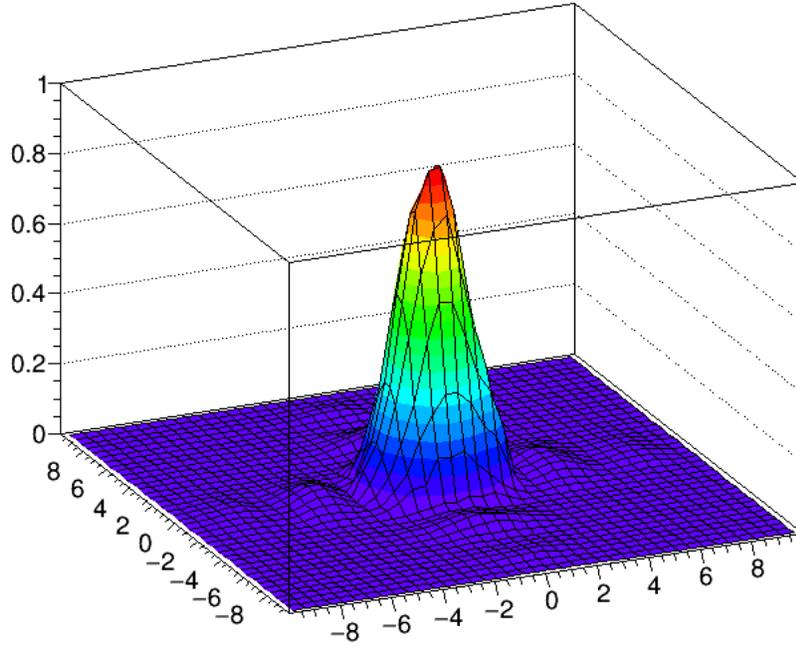


Figura 7: Gerada pela autora. temos o valor de  $I(\hat{u})/I(\hat{u}_0)$  no eixo vertical, enquanto as coordenadas  $x$  e  $y$  estão representadas no plano horizontal. Nesta figura, foi considerado  $a = b = 0.5mm$ .

$1.22\pi$ . Assim, utilizando o critério para distinguir dois objetos utilizado em aula (um máximo deve ser visto juntamente com um mínimo do segundo objeto), podemos obter o critério de resolução de Rayleigh estudado em sala, pois como  $u = k a \sin\theta$ , fazendo com que  $\Delta u = 1.22\pi$ , temos 17:

$$\frac{2\pi}{\lambda} a \sin\theta \approx 1.22\pi \quad (17)$$

Assim, concluímos os estudos sobre a difração de Fraunhofer em abertura circular e retangular.

## 0.4 Conclusão

A difração de Fraunhofer é um efeito muito interessante, que só pode ser explicada pela natureza da propagação ondulatória da luz, algo muito importante para a formulação da física como conhecemos hoje.

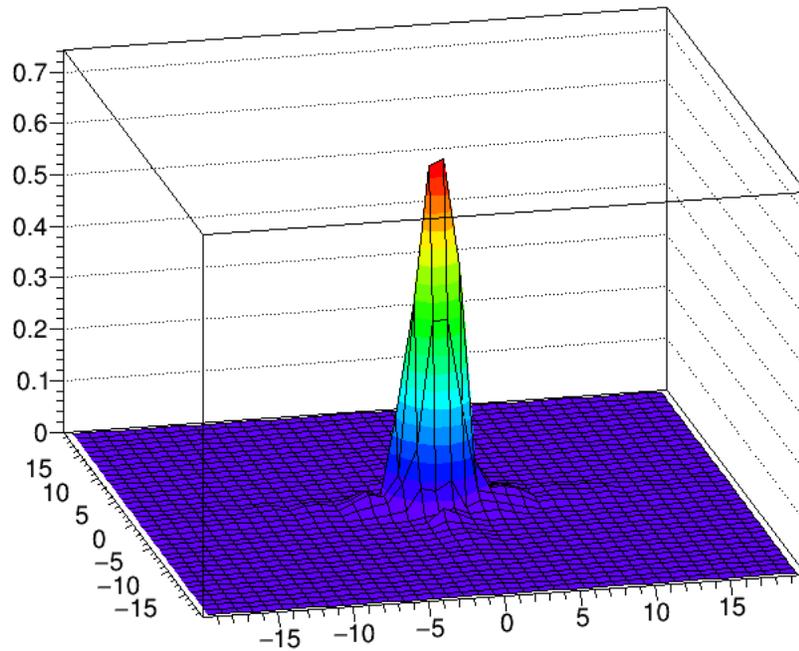


Figura 8: Gerada pela autora. temos o valor de  $I(\hat{u})/I(\hat{u}_0)$  no eixo vertical, enquanto as coordenadas  $x$  e  $y$  estão representadas no plano horizontal. Nesta figura, foi considerado  $a = b = 1.0mm$ .

É possível observar com clareza as diferenças entre as figuras de difração formadas por diferentes aberturas ou por aberturas de diferentes dimensões, sendo bastante simples diferenciar esses efeitos.

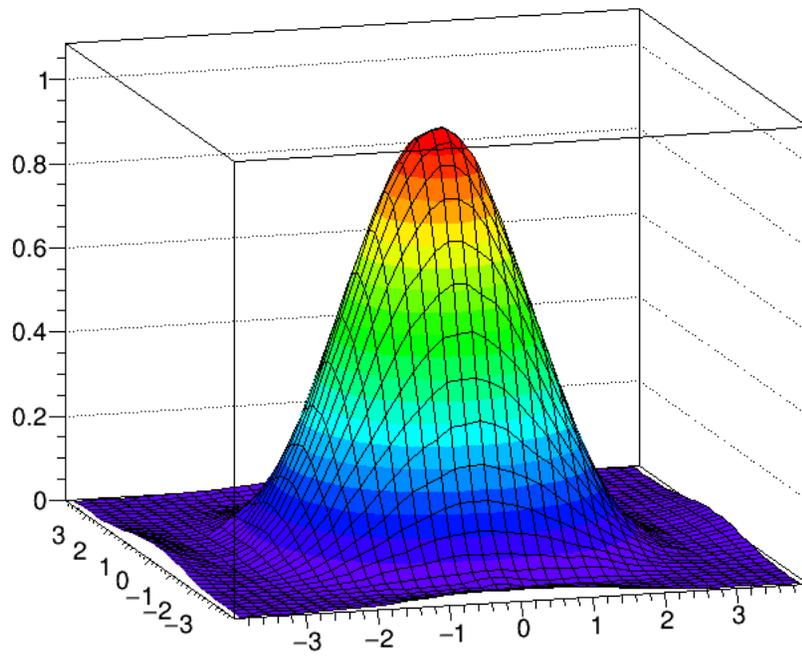


Figura 9: Gerada pela autora. temos o valor de  $I(\hat{u})/I(\hat{u}_0)$  no eixo vertical, enquanto as coordenadas  $x$  e  $y$  estão representadas no plano horizontal. Nesta figura, foi considerado  $a = b = 0.2mm$ .

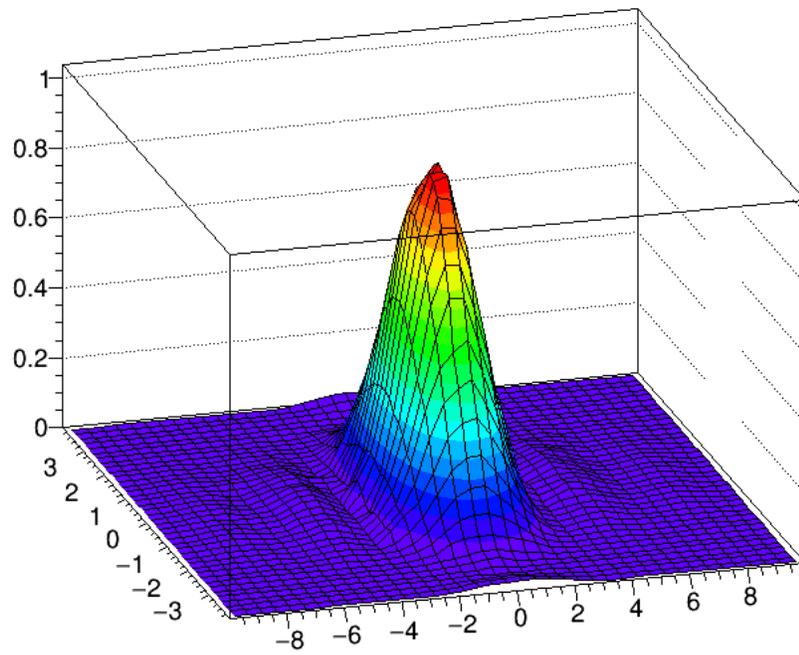


Figura 10: Gerada pela autora. temos o valor de  $I(\hat{u})/I(\hat{u}_0)$  no eixo vertical, enquanto as coordenadas  $x$  e  $y$  estão representadas no plano horizontal. Nesta figura, foi considerado  $a = 0.5mm, b = 0.2mm$ .

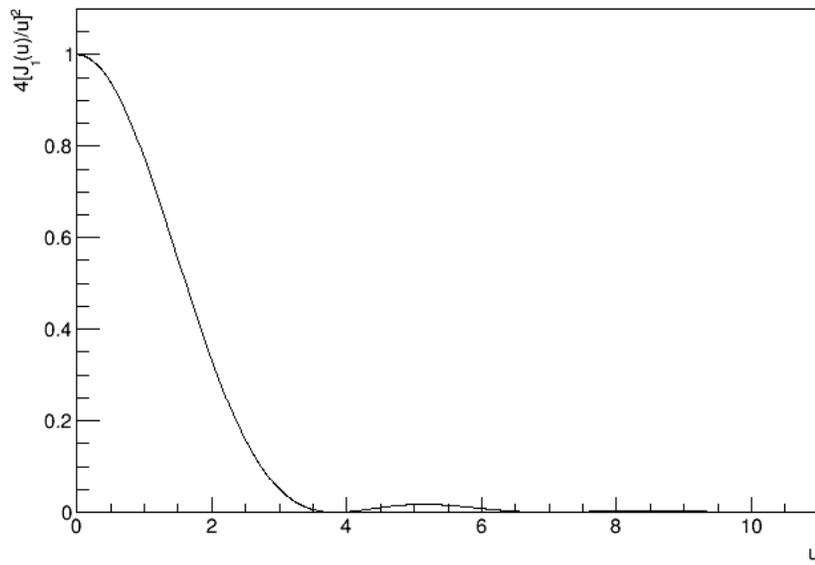


Figura 11: Gerada pela autora. Mostra graficamente a equação (15).

# Referências Bibliográficas

- [1] <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/Math/bessel.html>. Acesso em 03/12/2016.
- [2] NUSSENZVEIG H. M. *Curso de Física Básica - vol. 4*. Blucher, 1998.
- [3] GOMES Luis Aguiar. Notas de aula. <http://cee.uma.pt/people/faculty/luis.gomes/optica/T/optica.t13.pdf>, 2006. Acesso em 01/12/2016.