

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
FÍSICA GERAL IV
PROFESSORA: NATALIA VALE ASARI

Modelagem de um circuito RLC

Lucas Guesser Targino da Silva

9 de Setembro de 2016

Conteúdo

1	Circuitos	1
2	Equação Diferencial Linear de Segunda Ordem com Coeficientes Constantes	10
3	Circuito RLC	12
3.1	Modelagem do Problema	12
3.1.1	Caso $\alpha_1 \neq \alpha_2$	13
3.1.2	Caso $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$	14
3.2	Análise de Energia	14
3.3	Gráficos	15
4	Script em Matlab	20

Circuitos

1ª Lei de Kirchhoff

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \Leftrightarrow \text{DDP}(1,1) = 0 \Leftrightarrow \sum V|_C = 0$$

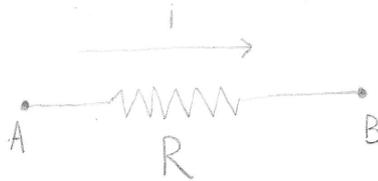
Necessário arbitrar uma direção para a corrente

2ª Lei de Kirchhoff

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad \text{ou} \quad \sum I_{\text{entra}}|_A = \sum I_{\text{saí}}|_A, \quad A \text{ é um nó}$$

Elementos de um circuito

Resistor

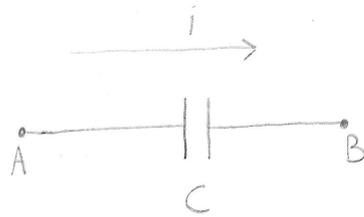


$$V_B - V_A = -Ri$$

$$P_{\text{tot}} = Vi = Ri^2 = \frac{V^2}{R}$$

$$; \quad U_R = \int P_{\text{tot}} dt \Rightarrow U_R = \int V i dt = R \int i^2 dt = \frac{1}{R} \int V^2 dt$$

Capacitor

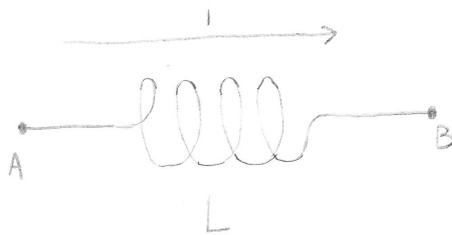


$$C = \frac{q}{V}$$

$$V_B - V_A = -\frac{q}{C}$$

$$U_C = \frac{q^2}{2C} = \frac{C}{2V^2} = \frac{qV}{2}$$

Indutor

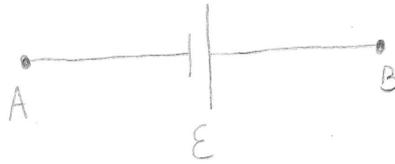


$$V_B - V_A = -L \frac{di}{dt}$$

$$U_L = \frac{Li^2}{2}$$

Obs: U_* = energia armazenada em *

Gerador de corrente contínua

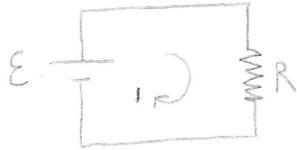


$$V_B - V_A = -\varepsilon$$

$$P_{\text{ot}} = \varepsilon I, \quad U_{\varepsilon} = \varepsilon q$$

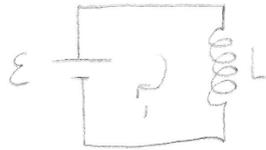
Estudo de circuitos de corrente contínua

R



$$\varepsilon - R I = 0 \Rightarrow \varepsilon = R I \Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{R} \Rightarrow I(t) = \frac{\varepsilon}{R}$$

L



$$\varepsilon - L \frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{di}{dt} - \frac{\varepsilon}{L} = 0 \Rightarrow i - \frac{\varepsilon}{L} t + \lambda = 0 \Rightarrow$$

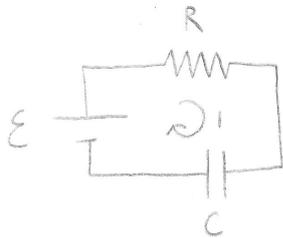
$$\Rightarrow i = \lambda + \frac{\varepsilon}{L} t, \quad i(0) = \lambda = i_0 \Rightarrow I(t) = i_0 + \frac{\varepsilon}{L} t$$

C



$$\mathcal{E} - \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow q = C\mathcal{E} \Rightarrow \boxed{q(t) = C\mathcal{E} \quad \wedge \quad i(t) = 0}$$

RC



$$\mathcal{E} - Ri - \frac{q}{C} = 0 \quad \wedge \quad i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q - \frac{\mathcal{E}}{R} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{1}{RC}i = 0 \Rightarrow \frac{di}{dt} = -\frac{1}{RC}i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{di}{i} = -\frac{1}{RC} dt \Rightarrow \int_{i_0}^i \frac{di}{i} = -\frac{1}{RC} \int_{t_0}^t dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{i}{i_0}\right) = -\frac{1}{RC}(t-t_0) \Rightarrow \frac{i}{i_0} = \exp\left(-\frac{1}{RC}(t-t_0)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{i(t) = i(t_0) \exp\left(-\frac{1}{RC}(t-t_0)\right)}$$

Condição de contorno:

$$q(t_0) = q_0 \Rightarrow i(t_0) = \frac{\varepsilon - q(t_0)}{R}$$

$$\frac{dq(t)}{dt} = i(t) \Rightarrow \int_{t_0}^t \frac{dq}{dt}(t) dt = \int_{t_0}^t i(t) dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q(t) - q(t_0) = \int_{t_0}^t i(t_0) \exp\left(-\frac{1}{RC}(t-t_0)\right) dt =$$

$$= \left[-RC i(t_0) \exp\left(-\frac{1}{RC}(t-t_0)\right) \right]_{t_0}^t =$$

$$= -RC i(t_0) \exp\left(-\frac{1}{RC}(t-t_0)\right) + RC i(t_0) =$$

$$RC i(t_0) = \left(\frac{\varepsilon - q(t_0)}{R} \right) RC = \varepsilon C - q(t_0) = q_{\max} - q(t_0)$$

$$= -(\varepsilon C - q(t_0)) \exp\left(-\frac{1}{RC}(t-t_0)\right) + \varepsilon C - q(t_0) \Rightarrow$$

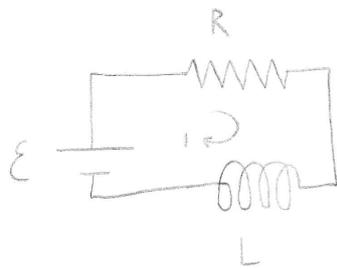
$$\Rightarrow q(t) = \varepsilon C - [\varepsilon C - q(t_0)] \exp\left(-\frac{1}{RC}(t-t_0)\right)$$

$$q(t) = q_{\max} - [q_{\max} - q_0] \exp\left(-\frac{1}{RC}(t-t_0)\right)$$

$$\exp(\tau(t-t_0)) < \frac{I_0}{100} \Rightarrow \ln(\cancel{\tau t} \tau(t-t_0)) < \ln\left(\frac{I_0}{100}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t-t_0 > \frac{\ln\left(\frac{I_0}{100}\right)}{\tau}, \quad \tau = \frac{-1}{RC} < 0 \Rightarrow t > \frac{\ln\left(\frac{I_0}{100}\right)}{\tau} + t_0$$

RL



$$\mathcal{E} - RI - L \frac{dI}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I - \frac{\mathcal{E}}{L} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L} I + \frac{\mathcal{E}}{L} \Rightarrow \frac{dI}{\frac{\mathcal{E}}{L} - \frac{R}{L} I} = dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{L}{R} \frac{dI}{\left(\frac{\mathcal{E}}{R} - I\right)} = dt \Rightarrow \int_{I(t_0)}^{I(t)} \frac{L}{R} \frac{1}{\left(\frac{\mathcal{E}}{R} - I\right)} dI = \int_{t_0}^t dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{L}{R} \int_{I(t_0)}^{I(t)} \frac{1}{\left(\frac{\mathcal{E}}{R} - I\right)} dI = (t-t_0) \Rightarrow -\frac{L}{R} \int_{I(t_0)}^{I(t)} \frac{1}{u} du = (t-t_0) \Rightarrow$$

$$u = \frac{\mathcal{E}}{R} - I$$

$$du = -dI$$

$$\Rightarrow -\frac{L}{R} \left[\ln(u) \right]_{i(t_0)}^{i(t)} = t - t_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\ln\left(\frac{\varepsilon}{R} - i\right) \right]_{i(t_0)}^{i(t)} = -\frac{R}{L} (t - t_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{\frac{\varepsilon}{R} - i(t)}{\frac{\varepsilon}{R} - i(t_0)}\right) = -\frac{R}{L} (t - t_0) \Rightarrow$$

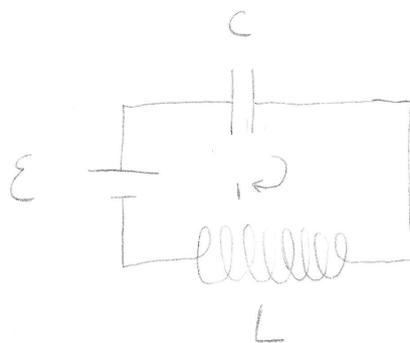
$$\Rightarrow \frac{\frac{\varepsilon}{R} - i(t)}{\frac{\varepsilon}{R} - i(t_0)} = \exp\left(-\frac{R}{L} (t - t_0)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\varepsilon}{R} - i(t) = \left[\frac{\varepsilon}{R} - i(t_0) \right] \exp\left(-\frac{R}{L} (t - t_0)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i(t) = \frac{\varepsilon}{R} - \left[\left(\frac{\varepsilon}{R} - i(t_0) \right) \exp\left(-\frac{R}{L} (t - t_0)\right) \right]$$

Condição de contorno: t_0 e $i(t_0) = I_0$

LC



$$\varepsilon - \frac{q}{C} - L \frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} q = \frac{\varepsilon}{L} \Rightarrow$$

$$i = \frac{dq}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = \frac{\varepsilon}{L}$$

Condições de contorno: $q(t_0) = q_0$, $\frac{dq}{dt}(t_0) = i(t_0) = i_0$

$$\left. \begin{array}{l} f''(x) + c_1 f(x) = c_2 \\ \text{Solução: } f(x) = k_1 \sin(\sqrt{c_1} x) + k_2 \cos(\sqrt{c_1} x) + \frac{c_2}{c_1} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{obtida pelo} \\ \text{computador} \end{array}$$

Sendo $c_1 = \frac{1}{LC}$ e $c_2 = \frac{\varepsilon}{L}$, temos.

$$q(t) = k_1 \sin(\sqrt{c_1} t) + k_2 \cos(\sqrt{c_1} t) + \frac{c_2}{c_1}$$

$$i(t) = \frac{dq}{dt}(t) = k_1 \sqrt{c_1} \cos(\sqrt{c_1} t) - k_2 \sqrt{c_1} \sin(\sqrt{c_1} t)$$

$$\frac{d^2q}{dt^2}(t) = -k_1 c_1 \sin(\sqrt{c_1} t) - k_2 c_1 \cos(\sqrt{c_1} t)$$

Capítulo 2

Equação Diferencial Linear de Segunda Ordem com Coeficientes Constantes

Definição 2.1. Uma equação diferencial linear de segunda ordem com coeficientes constantes é uma equação da forma:

$$y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) + a = 0 \quad , \quad a_1, a_0, a \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y(x) + a = 0 \quad , \quad a_1, a_0, a \in \mathbb{R} \quad (2.2)$$

$$D^2 y(x) + a_1 Dy(x) + a_0 y(x) + a = 0 \quad , \quad a_1, a_0, a \in \mathbb{R} \quad (2.3)$$

Solução

Propomos como solução:

$$y(x) = \exp(\alpha x) - \frac{a}{a_0} \quad (2.4)$$

Assim:

$$y'(x) = \alpha \exp(\alpha x)$$

$$y''(x) = \alpha^2 \exp(\alpha x)$$

Utilizando na equação diferencial:

$$\begin{aligned} \alpha^2 \exp(\alpha x) + a_1 \alpha \exp(\alpha x) + a_0 \left(\exp(\alpha x) - \frac{a}{a_0} \right) + a &= 0 \quad \Leftrightarrow \\ \alpha^2 \exp(\alpha x) + a_1 \alpha \exp(\alpha x) + a_0 \exp(\alpha x) - a + a &= 0 \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \exp(\alpha x) [\alpha^2 + a_1 \alpha + a_0] &= 0 \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha^2 + a_1 \alpha + a_0 &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

2.5 é uma equação de segunda ordem, fácil de solucionar.

$$\alpha = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4 a_0}}{2} \quad (2.6)$$

Defina:

$$\alpha_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4 a_0}}{2} \in \mathbb{C} \quad (2.7)$$

$$\alpha_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4 a_0}}{2} \in \mathbb{C} \quad (2.8)$$

Caso $\alpha_1 \neq \alpha_2$

Solução geral da equação diferencial:

$$y(x) = c_1 \exp(\alpha_1 x) + c_2 \exp(\alpha_2 x) - \frac{a}{a_0}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad (2.9)$$

Pode ocorrer que $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}/\mathbb{R}$. Como o exponencial de números complexos está bem definido, não há nenhum problema em assumir tal solução.

Caso $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$

Solução geral da equação diferencial¹:

$$y(x) = c_1 \exp(\alpha x) + c_2 x \exp(\alpha x) - \frac{a}{a_0}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad (2.10)$$

Novamente, não há problema com $\alpha \in \mathbb{C}$.

¹Não vou mostrar de onde veio tal solução. O leitor, se quiser, pode verificar que a solução abaixo satisfaz a equação diferencial no caso $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$.

Capítulo 3

Circuito RLC

3.1 Modelagem do Problema

Considere o circuito da figura 3.1.

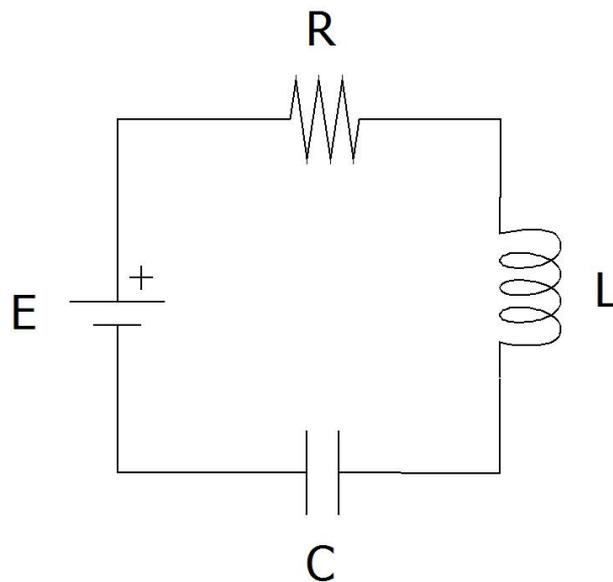


Figura 3.1: Diagrama de um circuito RLC em série

Pela primeira lei de Kirchhoff ($\sum V = 0$), a equação que modela o evento físico de tal circuito é:

$$E - R i - L \frac{di}{dt} - \frac{q}{C} = 0 \quad (3.1)$$

$$i(t) = \frac{dq}{dt}(t) \quad (3.2)$$

utilizando (3.2) em (3.1) e fazendo algumas manipulações, obtemos:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{L C} q - \frac{E}{L} = 0 \quad (3.3)$$

Observe que (3.3) tem o formato da equação da definição 2.1. Aplicando a solução proposta no capítulo 2:

$$\alpha_1 = \frac{-\frac{R}{L} + \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - 4 \frac{1}{L C}}}{2} \quad (3.4)$$

$$\alpha_2 = \frac{-\frac{R}{L} - \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - 4 \frac{1}{L C}}}{2} \quad (3.5)$$

3.1.1 Caso $\alpha_1 \neq \alpha_2$

$$q(t) = c_1 \exp(\alpha_1 t) + c_2 \exp(\alpha_2 t) + E C \quad (3.6)$$

$$i(t) = \frac{dq}{dt}(t) = c_1 \alpha_1 \exp(\alpha_1 t) + c_2 \alpha_2 \exp(\alpha_2 t) \quad (3.7)$$

Determinando c_1 e c_2 a partir das condições de contorno

Condições de contorno:

$$q(t_o) = q_o \quad \wedge \quad i(t_o) = i_o \quad (3.8)$$

Da primeira condição:

$$\begin{aligned} q(t_o) &= q_o \\ c_1 \exp(\alpha_1 t_o) + c_2 \exp(\alpha_2 t_o) + E C &= q_o \\ c_1 \exp(\alpha_1 t_o) + c_2 \exp(\alpha_2 t_o) &= q_o - E C \end{aligned} \quad (3.9)$$

Da segunda condição:

$$\begin{aligned} i(t_o) &= i_o \\ c_1 \alpha_1 \exp(\alpha_1 t_o) + c_2 \alpha_2 \exp(\alpha_2 t_o) &= i_o \end{aligned} \quad (3.10)$$

Escrevendo (3.9) e (3.10) na forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \exp(\alpha_1 t_o) & \exp(\alpha_2 t_o) \\ \alpha_1 \exp(\alpha_1 t_o) & \alpha_2 \exp(\alpha_2 t_o) \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} q_o - E C \\ i_o \end{bmatrix}}_b \quad (3.11)$$

Obtemos um sistema de equações lineares $Ax = b$ possível e determinado, visto que, por $\alpha_1 \neq \alpha_2$, $\det(A) \neq 0$.

3.1.2 Caso $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$

$$q(t) = (c_1 + c_2 t) \exp(\alpha t) + E C = c_1 \exp(\alpha t) + c_2 t \exp(\alpha t) + E C \quad (3.12)$$

$$i(t) = \frac{dq}{dt}(t) = [c_1 \alpha + c_2(1 + \alpha t)] \exp(\alpha t) = c_1 \alpha \exp(\alpha t) + c_2(1 + \alpha t) \exp(\alpha t) \quad (3.13)$$

Determinando c_1 e c_2 a partir das condições de contorno

Condições de contorno:

$$q(t_o) = q_o \quad \wedge \quad i(t_o) = i_o \quad (3.14)$$

Da primeira condição:

$$\begin{aligned} q(t_o) &= q_o \\ c_1 \exp(\alpha t_o) + c_2 t_o \exp(\alpha t_o) + E C &= q_o \\ c_1 \exp(\alpha t_o) + c_2 t_o \exp(\alpha t_o) &= q_o - E C \end{aligned} \quad (3.15)$$

Da segunda condição:

$$\begin{aligned} i(t_o) &= i_o \\ c_1 \alpha \exp(\alpha t_o) + c_2(1 + \alpha t_o) \exp(\alpha t_o) &= i_o \end{aligned} \quad (3.16)$$

Escrevendo (3.15) e (3.16) na forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \exp(\alpha t_o) & t_o \exp(\alpha t_o) \\ \alpha \exp(\alpha t_o) & (1 + \alpha t_o) \exp(\alpha t_o) \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} q_o - E C \\ i_o \end{bmatrix}}_b \quad (3.17)$$

Obtemos um sistema de equações lineares $Ax = b$ possível e determinado, visto que $\det(A) = \exp(\alpha t_o) \neq 0$.

3.2 Análise de Energia

A energia contida no circuito U_T vem da energia armazenada no capacitor (C) e da energia armazenada no indutor (L).

$$U_C(t) = \frac{q^2(t)}{2 C} \quad (3.18)$$

$$U_L(t) = \frac{L i^2(t)}{2} \quad (3.19)$$

$$U_T(t) = U_C(t) + U_L(t) = \frac{q^2(t)}{2 C} + \frac{L i^2(t)}{2} \quad (3.20)$$

$$\frac{dU_T}{dt}(t) = \frac{dU_C}{dt}(t) + \frac{dU_L}{dt}(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{q^2(t)}{2 C} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{L i^2(t)}{2} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2C} 2 q(t) \frac{dq}{dt}(t) + \frac{L}{2} 2 i(t) \frac{di}{dt}(t) = \\
&= \frac{1}{C} q(t) i(t) + L i(t) \frac{d^2q}{dt^2}(t) = \\
&= i(t) \underbrace{\left(\frac{1}{C} q(t) + L \frac{d^2q}{dt^2}(t) \right)}_{=-R i(t)+E \text{ equação (3.3)}} = \\
&= -R i^2(t) + E i(t)
\end{aligned}$$

Caso $E = 0$:

$$\frac{dU_T}{dt}(t) = -R i^2(t) < 0$$

A energia num circuito RLC sem fonte sempre diminui, é dissipada pela resistência.

3.3 Gráficos

Os gráficos a seguir foram feitos utilizando as seguintes configurações:

Grandeza	Símbolo	Valor	Unidade
Instante Inicial	t_o	0	s
Fonte de Energia	E	0	V
Capacitância	C	1	F
Indutância	L	1	H
Carga Inicial	q_o	10	C
Corrente Inicial	i_o	0	A

Tabela 3.1: Tabela com as características utilizadas para a confecção dos gráficos.

O que é modificado é o valor da resistência R , que sempre será dada em Ω .

R	Max $\left(\frac{dU_T}{dt}\right)$
0.1	-1.534337918798201e-05
0.5	-3.301196136931140e-05
2	-0.036502333376343
5	-0.004097539181008

Tabela 3.2: Tabela com o maior valor das derivadas de U_T , calculadas numericamente. Observe que são todas negativas.

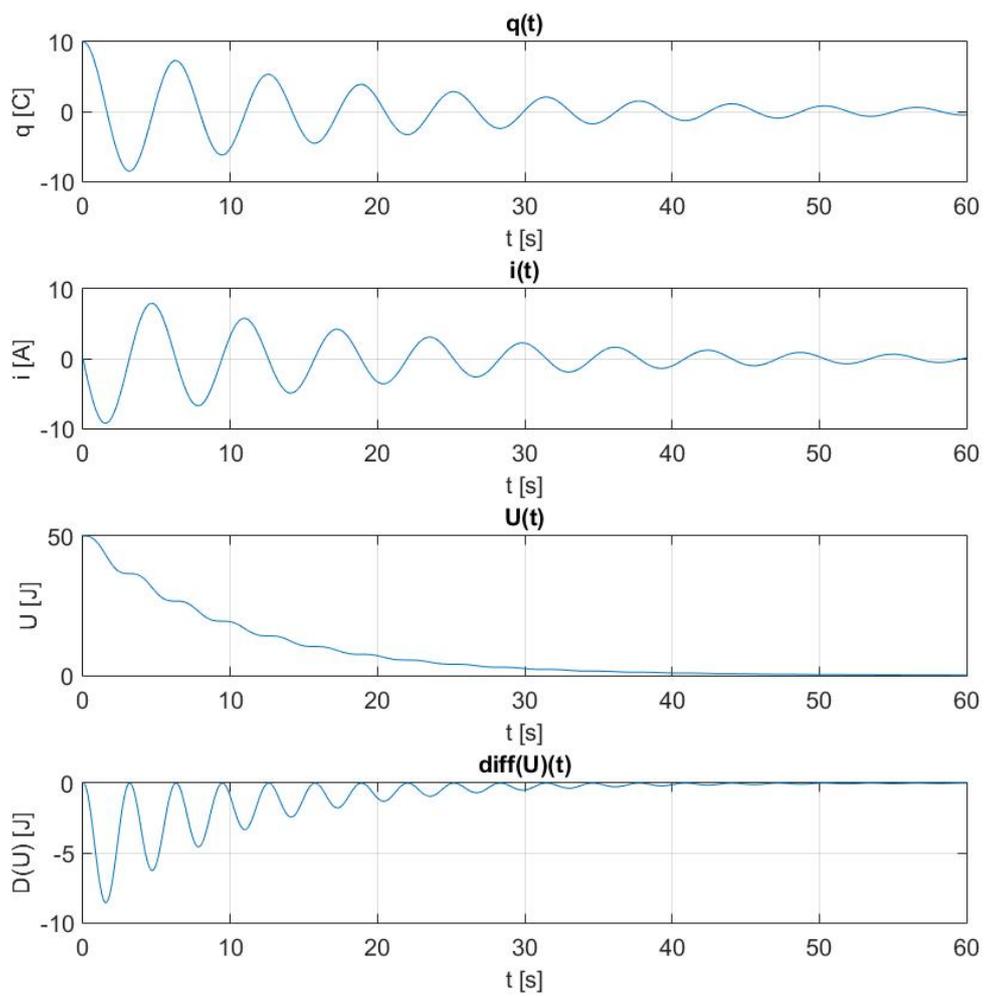


Figura 3.2: $R = 0.1\Omega$

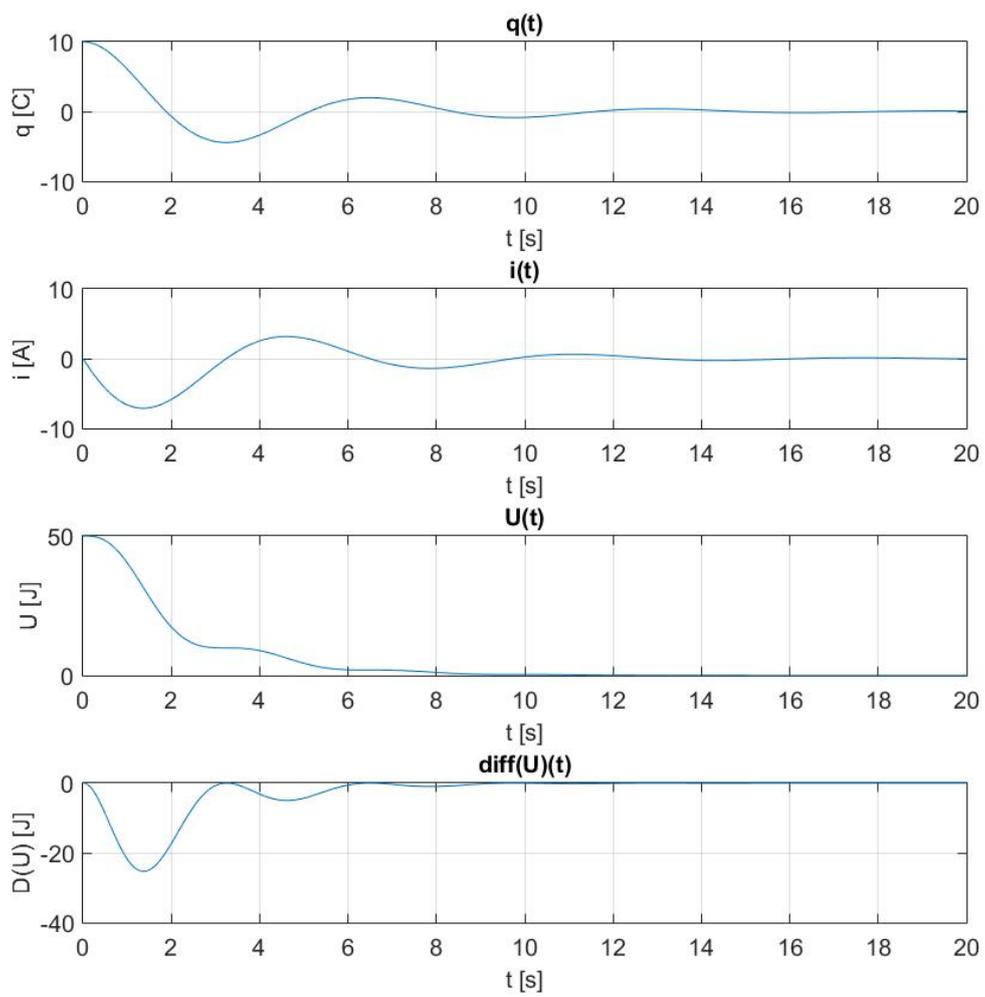


Figura 3.3: $R = 0.5\Omega$

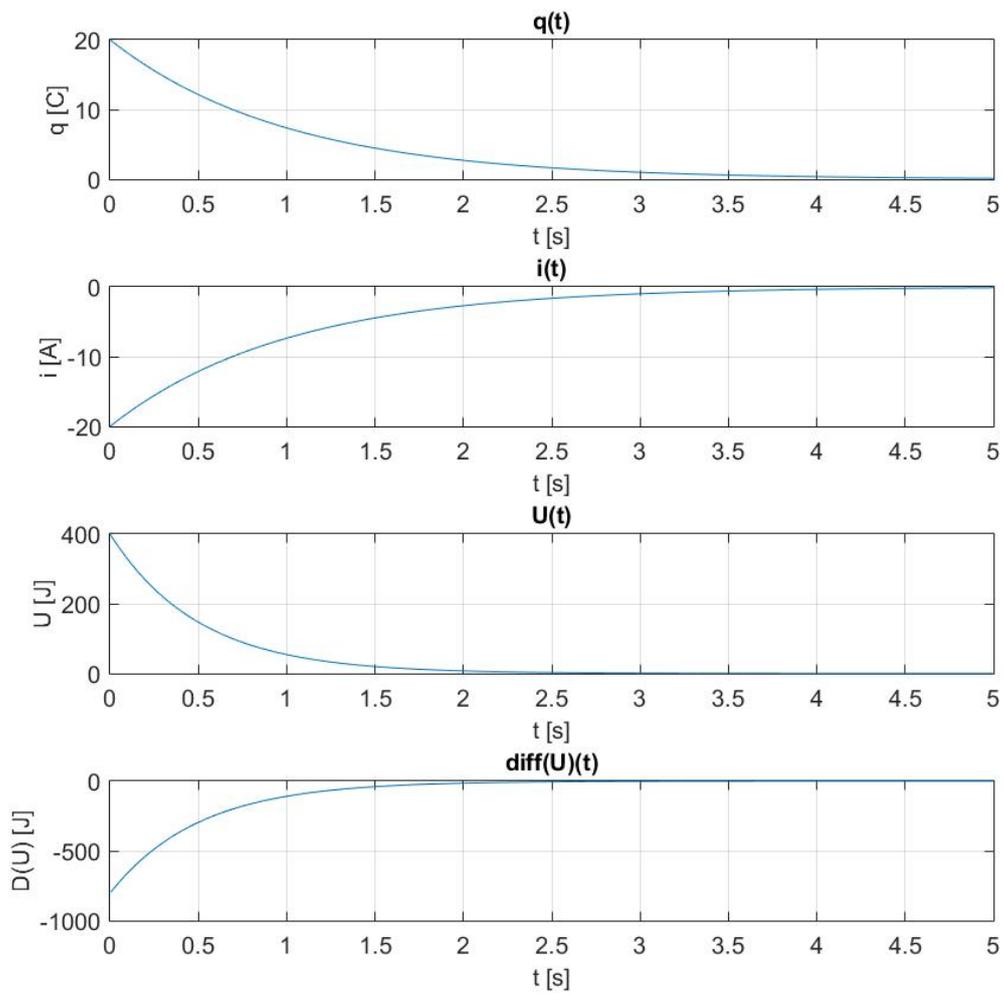


Figura 3.4: $R = 2\Omega$

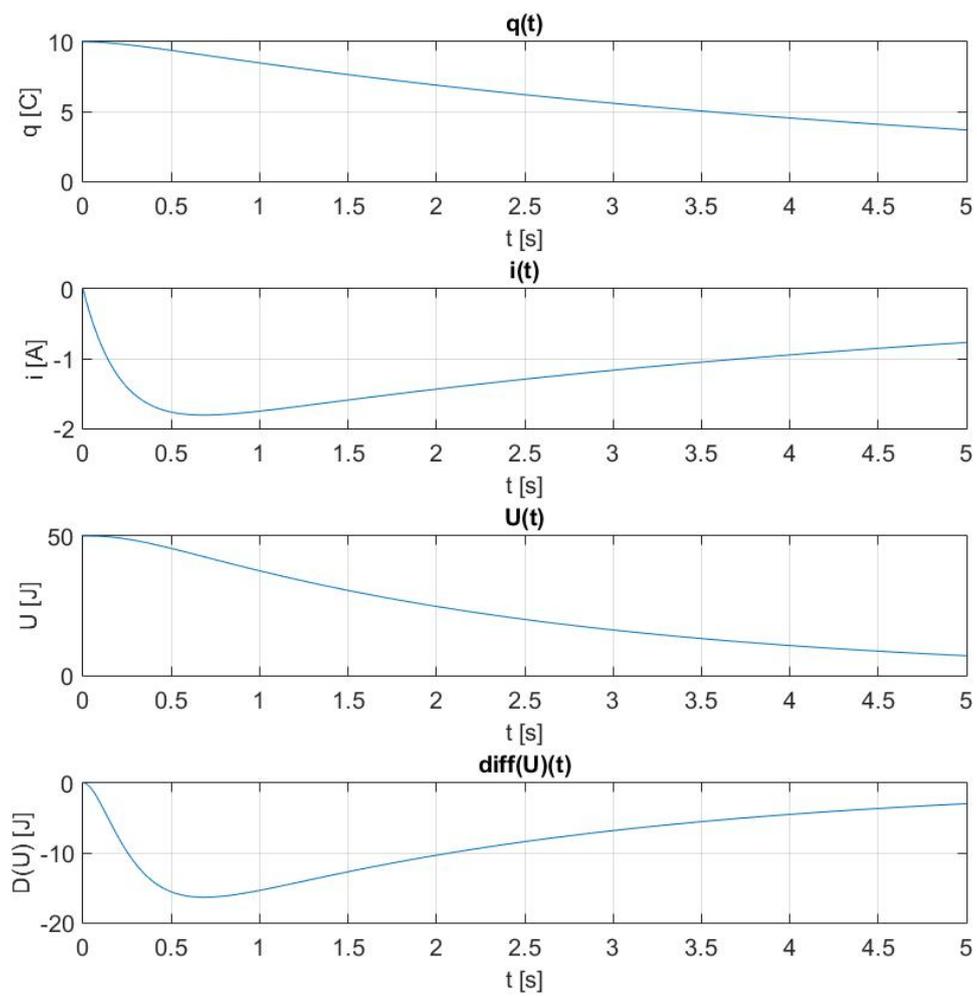


Figura 3.5: $R = 5\Omega$

Capítulo 4

Script em Matlab

Para que o leitor possa gerar resultados com as configurações que desejar, foi feito um script em matlab, contido na pasta *matlab_code*. Para executá-lo, inicie o Matlab ou o Octave (o Matlab não possui distribuição grátis, mas possui um equivalente distribuído gratuitamente, o Octave). Mude sua localização para a pasta *matlab_code* (onde for que ela estiver em seu computador). Feito isso, basta executar o script *RLC_script* e inserir os dados. Ao fim dos cálculos, será apresentado um gráfico com os resultados, podendo esse ser salvo pelo usuário.